**Teoria perturbativa**
**(parte II : probabilità di transizione, pacchetto d'onda)**

## Espressione della perturbazione

Qui utilizziamo i risultati della prima parte dello studio dell'interazione della radiazione elettromagnetica con la materia, fatto con approccio perturbativo semiclassico (vedi).
In particolare utilizziamo l'approssimazione di risposta lineare, l'approssimazione di bassa intensità dell'onda incidente, e l'*approssimazione di dipolo elettrico* .
Inoltre dapprima supponiamo che l'onda incidente sia monocromatica.

In tali approssimazioni si ha il seguente elemento di matrice della perturbazione (vedi) :

$$\langle \phi_f | W_{DE}(t) | \phi_i \rangle = i\, q\, E_0 \, \frac{\omega_{fi}}{\omega} \langle \phi_f | Z | \phi_i \rangle \sin \omega t \quad \text{(perturbazione approssimata)}$$

dove $E_0$ è l'ampiezza massima del campo elettrico dell'onda
e $Z$ è la componente $z$ dell'operatore di posizione.

## Probabilità di transizione nel caso di onda monocromatica

A questo punto possiamo utilizzare la teoria della perturbazione armonica (vedi).
Nell'approssimazione di considerare il solo *termine risonante*, questa dice che la probabilità di transizione è in generale data da :

$$P_{fi}(t,\omega) = \frac{|W_{0\,fi}|^2}{4\hbar^2} F(t, \omega - \omega_{fi}).$$

Se per la perturbazione usiamo l'espressione approssimata (approssimazione di dipolo elettrico, vedi), nell'espressione della probabilità di transizione compare il modulo quadro dell'ampiezza massima del *campo elettrico* :

$$P_{fi}(t,\omega) = \frac{\left| q\, E_0(\omega) \, \frac{\omega_{fi}}{\omega} \langle \phi_f | Z | \phi_i \rangle \right|^2}{4\hbar^2} F(t, \omega - \omega_{fi}) =$$

$$= \frac{q^2}{4\hbar^2} \left( \frac{\omega_{fi}}{\omega} \right)^2 \left| \langle \phi_i | z | \phi_f \rangle \right|^2 E_0^2(\omega)\, F(t, \omega - \omega_{fi}).$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che in generale l'ampiezza massima del campo elettrico può dipendere dalla frequenza dell'onda.

Per quanto segue è preferibile esprimere la probabilità di transizione in funzione dell'**intensità** della componente monocromatica del pacchetto, anzicché del suo campo elettrico.

Le due quantità sono legate dall'espressione :

$$\mathcal{I} = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

dove $\mathcal{I}$ è l'intensità media in un periodo, e $E_0$ è il modulo dell'ampiezza massima del campo elettrico oscillante dell'onda.

Dunque facendo questa sostituzione si ha la probabilità di transizione dovuta ad un'onda monocromatica, in funzione dell'intensità dell'onda :

$$\boxed{P_{fi}(t,\omega) = \frac{q^2}{4\hbar^2}\left(\frac{\omega_{fi}}{\omega}\right)^2 \left|\langle\phi_i|z|\phi_f\rangle\right|^2 \frac{8\pi}{c}\mathcal{I}(\omega)\, F\left(t\,,\omega-\omega_{fi}\right)}$$

(probabiltià di transizione, dovuta ad un'onda monocromatica, in funzione dell'intensità dell'onda).

Si tratta di una probabilità di transizione che dipende, oltre che dal tempo, anche dalla frequenza dell'onda.

Fin qui abbiamo considerato un'onda monocromatica!

**Pacchetto d'onda**

Nella realtà non esistono le onde monocromatiche, e avremo a che fare almeno con **pacchetti d'onda**, che possiamo schematizzare con la sovrapposizione di più onde 'monocromatiche', cioè con frequenza compresa tra $\omega$ e $\omega+\delta\omega$

A rigore, nell'applicare la teoria delle perturbazioni, bisogna dunque **prima** integrare sulla frequenza $\omega$, per ottenere un'espressione dell'elemento di matrice della perturbazione $W_{fi}(t)$, e **dopo** integrare sul tempo $t$.

In molti casi è però possibile ipotizzare che non ci sia interazione tra le componenti monocromatiche del pacchetto d'onda, e questa ipotesi ci permette di **invertire l'ordine dell'integrazione**, cioè di integrare **prima** sul tempo le singole componenti monocromatiche del pacchetto d'onda, ottenendo una densità di probabilità per intervallo di frequenza, e **dopo** integrare sulla frequenza per ottenere infine la probabilità di transizione.
Queste ipotesi si dicono **ipotesi di radiazione incoerente**.

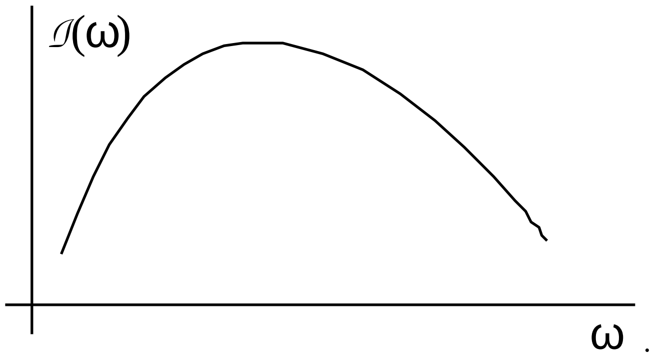
**Densità spettrale**

Nel caso di onda monocromatica abbiamo visto come la probabiltià di transizione dipenda dalla frequenza dell'onda incidente.

In particolare la probabilità di transizione dipende dalla frequenza, oltre che esplicitamente, anche implicitamente, tramite il termine risonante, che dipende appunto dalla frequenza, e tramite l'intensità dell'onda, che in generale dipende anc'essa dalla frequenza.

In particolare, avendo a che fare con un pacchetto d'onda anzicché con un'onda monocromatica, e nell'ipotesi di radiazione incoerente, dobbiamo considerare la cosiddetta **densità spettrale**, cioè la funzione $\mathcal{I}(\omega)$ (intensità per

intervallo unitario di frequenza) che descrive la dipendenza dell'intensità dell'onda dalla frequenza.
Per fissare le idee possiamo pensare a qualcosa tipo lo spettro di corpo nero :




Per un pacchetto d'onda, la quantità

$$\mathcal{I}(\omega)\, d\omega$$

esprime l'intensità della radiazione la cui frequenza sia compresa tra $\omega$ e $\omega+d\omega$.

**Integrazione su $\omega$**

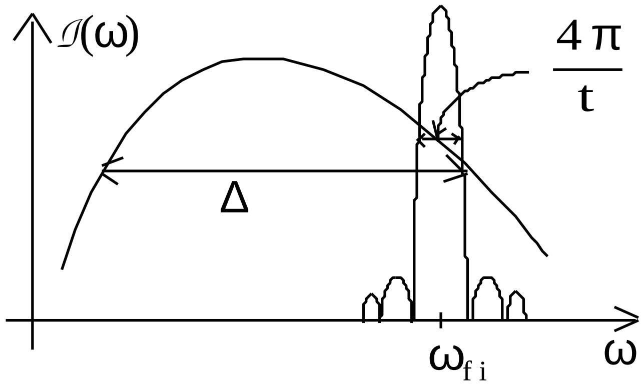
A questo punto dobbiamo integrare su $\omega$, e c'è una importante osservazione che semplifica molto tale integrazione!
Studiamo la dipendenza da $\omega$ della probabilità di transizione relativa alla singola componente monocromatica :

$$P_{fi}(t,\omega) = \frac{q^2}{4\hbar^2}\left(\frac{\omega_{fi}}{\omega}\right)^2 \left|\langle \phi_i | z | \phi_f \rangle\right|^2 \frac{8\pi}{c}\,\mathcal{I}(\omega)\, F(t\,, \omega-\omega_{fi})\, d\omega.$$

Innanzitutto c'è una dipendenza esplicita dalla frequenza, poi c'è la $\mathcal{I}(\omega)$, che è la distribuzione spettrale della radiazione, infine c'è la funzione $F(t, \omega-\omega_{fi})$, che è il cosiddetto termine risonante, cioè una funzione che ha il tipico andamento di una curva di diffrazione, centrata attorno a $\omega_{fi}$ e con ampiezza del picco principale pari a 4 $\pi/t$ (vedi).

Detta $\Delta$ l'ampiezza dello spettro della radiazione incidente, cioè l'intervallo di frequenze per le quali l'intensità della radiazione è apprezzabilmente non nulla, se $t$ è tale che

$$4\,\pi/t \ll \Delta$$



allora possiamo approssimare la funzione $F(t, \omega-\omega_{fi})$ con una delta di Dirac, cioé

$$F(t, \omega-\omega_{fi}) \simeq 2\pi t\, \delta(\omega-\omega_{fi})$$

(notare la $t$, che è importante nel seguito!).

Ciò è rigoroso, in quanto si ha

$$\frac{1}{2\pi t} \lim_{t\to\infty} \frac{\sin^2[(x-x_0)t/2]}{(x-x_0)/2} = \delta(x-x_0)$$

(per la dimostrazione vedi appendice II del Cohen, vol II).
(?) ma noi anche al denominatore ci troviamo un quadrato, e non solo il seno al numeratore! controllare ! (Forse basta mettere in evidenza $1/(x-x_0)$, perché l'importante è far comparire la delta...)

Dunque, per tempi sufficientemente lunghi (vedi oltre) otteniamo

$$P_{fi}(t,\omega) = \frac{q^2}{4\hbar^2}\left(\frac{\omega_{fi}}{\omega}\right)^2 |\langle\phi_i|z|\phi_f\rangle|^2 \frac{8\pi}{c}\mathcal{I}(\omega)\, 2\pi t\, \delta(\omega-\omega_{fi})\, d\omega$$

e quindi, integrando su $\omega$ si ha la probabilità di transizione 'totale', cioè dovuta all'interazione con l'intero pacchetto d'onda :

$$P_{fi}^{tot}(t) = \int_0^\infty P_{fi}(t,\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{q^2}{4\hbar^2} |\langle\phi_i|z|\phi_f\rangle|^2 \frac{8\pi}{c} 2\pi t \int_0^\infty \left(\frac{\omega_{fi}}{\omega}\right)^2 \mathcal{I}(\omega)\, \delta(\omega-\omega_{fi})\, d\omega$$

$$\boxed{P_{fi}^{tot}(t) = \frac{4\pi^2 q^2}{\hbar^2 c} |\langle\phi_i|z|\phi_f\rangle|^2 \mathcal{I}(\omega_{fi})\, t}$$

(probabilità di transizione, caso onda EM).

Nota : In maniera impropria potremmo dire che questa formula è valida per $t\to\infty$; ma vediamo che ciò non è corretto. Prima di tutto non è possibile aspettare un tempo infinito!
Inoltre, dobbiamo sempre ricordare che poiché stiamo adoperando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo *troncata al prim'ordine*, abbiamo in precedenza imposto un limite superiore al tempo (vedi).

**Probabilità di transizione in funzione della densità di energia**

Chiarito in che condizioni è valida questa espressione della probabilità di transizione, facciamo qualche 'ritocco', per ottenere una forma più semplice, e che dipenda dalla densità di energia trasportata dall'onda, anziché dall'intensità dell'onda.

Questa relazione ci servirà a sviluppare la teoria fenomenologica di Einstein.

Innanzitutto possiamo sostituire $z$ con il vettore posizione e dividere tutto per 3 (per semplicità ometto l'apice 'tot') :

$$P_{fi}(t) = \frac{4}{3}\frac{\pi^2 q^2}{\hbar^2 c} \left|\langle \phi_i | \vec{r} | \phi_f \rangle\right|^2 \mathcal{I}(\omega_{fi})\, t$$

questo significa aver generalizzato al caso di onda polarizzata (linearmente) lungo una qualunque direzione $\vec{r}$.

Poi possiamo far comparire la 'costante di struttura fine'

$$\alpha \equiv \frac{q^2}{\hbar c}$$

(ricordiamo che $q$ è la carica dell'elettrone) che è una quantità adimensionale, e quindi la probabilità di transizione diventa :

$$P_{fi}(t) = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{\hbar} \alpha \left|\langle \phi_i | \vec{r} | \phi_f \rangle\right|^2 \mathcal{I}(\omega_{fi})\, t.$$

Possiamo infine esprimere la probabilità, anziché in termini dell'intensità, in termini della densità di energia per unità di volume associata all'onda elettromagnetica, che chiameremo $\rho$.

Il legame tra intensità e densità di energia è $\mathcal{I}\, n = \rho\, c$, dove $n$ è il coefficiente di rifrazione del mezzo e $c$ è la velocità di propagazione.
Nel nostro caso il mezzo è il vuoto, quindi $n=1$, e dunque :

$$\boxed{P_{fi}(t) = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{\hbar} \alpha \left|\langle \phi_i | \vec{r} | \phi_f \rangle\right|^2 c\, \rho(\omega_{fi})\, t}$$

(probabilità di transizione in funzione della densità di energia).

Come detto poco sopra, Einstein ha sviluppato una teoria fenomenologica partendo da questa formula ed esplicitandola, procurandosi un'espressione della densità di energia trasportata da un'onda elettromagnetica.