Teoria classica dell’interazione tra radiazione e materia

(vedi lezione 13, del 4/11/98)

Abstract

La teoria classica è basata sul modello dell’atomo di Lorentz, e arriva a descrivere la ‘sezione d’urto’.

Atomo di lorentz

Ai fini di questa teoria classica, la descrizione di atomo che utilizziamo è quella che vede gli elettroni come particelle cariche che fanno piccole oscillazioni attorno a posizioni di equilibrio. Essendo piccole, le oscillazioni sono approssimate a **moti armonici**, con una **frequenza propria** w_0.

Quando gli elettroni sono investiti dall’onda elettromagnetica, compiono delle oscillazioni, e dunque re-irraggiano la radiazione elettromagnetica.

Qui cominciamo a vedere le differenze con lo schema interpretativo della meccanica quantistica.
Infatti qui non si parla di transizioni tra stati stazionari. Qui l’unico stato stazionario dell’elettrone è quello di quiete.
Tuttavia vedremo che alcuni risultati di questo modello classico si mantengono nella meccanica quantistica.

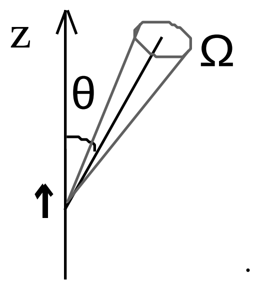
Partiamo dall’espressione della **potenza irraggiata da un dipolo elettrico oscillante, per unità di angolo solido**

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^2} v^2 \sin^2\theta$$

dove :

* v(t) è la velocità (lineare) istantanea con cui si muovono le cariche del dipolo (funzione del tempo)

* q è l’angolo formato tra l’asse del dipolo e il vettore posizione attorno a cui stiamo prendendo l’angolo unitario



(il fatto che compaia solo l’angolo azimutale q è coerente col fatto che sia la distribuzione di carica che quindi l’onda hanno simmetria cilindrica attorno all’asse del dipolo, che possiamo mettere sull’asse z. Notiamo inoltre che questa quantità dipende dal tempo, in quanto v(t) è una funzione del tempo)

Integrando rispetto a q otteniamo la **potenza totale irraggiata dal dipolo** su tutto l’angolo solido

$$P(t) = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2(t) \qquad \text{(formula di Larmor)}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{z}^2(t)$$

(?) non capisco questo conto, sopratutto perché integrando sull'angolo si passa dalla velocità di oscillazione all'accelerazione di oscillazione?
(vedi Mencuccini II pag 403 - 405)

(tra l'altro questa formula è importante perché mostra che se l'elettrone accelera, irraggia, perdendo energia, e dunque il modello atomico di tipo planetario fallisce)

- Ricerca della legge del moto dell'elettrone -

Ottenuta questa espressione, vogliamo esplicitare la legge oraria del moto dell'elettrone, e quindi la sua velocità e accelerazione (funzioni del tempo) per poi sostituirla in questa formula della potenza irraggiata.
Siamo in ambito classico, e utilizzeremo il formalismo newtoniano, partendo dalle forze agenti sul sistema.

a) forza ritardatrice

Prima di tutto vogliamo tenere conto del fatto che l'elettrone oscillante irraggia (emisione spontanea) e dunque perde energia. Lo facciamo introducendo una forza fittizia, detta '**forza ritardatrice**', che agendo sul dipolo avrebbe lo stesso effetto di diminuirne l'energia ritardandone il moto (accelerazione negativa, diminuzione di velocità).

Se integriamo su un periodo la potenza irraggiata otteniamo l'energia irraggiata dal dipolo in un periodo :

$$\int_0^T P(t)\,dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^T \ddot{z}^2(t)\,dt = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^T \ddot{z}(t)\,\ddot{z}(t)\,dt$$

integrando per parti

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left[\left[\dot{z}(t)\,\ddot{z}(t)\right]_0^T - \int_0^T \dddot{z}(t)\,\dot{z}(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left[\left[\dot{z}(T)\,\ddot{z}(T) - \dot{z}(0)\,\ddot{z}(0)\right] - \int_0^T \dddot{z}(t)\,\dot{z}(t)\,dt\right].$$

Utilizzando la definizione di periodo (il moto ri-assume le stesse caratteristiche dinamiche), per cui

$$z(0) = z(T) \qquad ; \qquad \dot{z}(0) = \dot{z}(T) \qquad ; \qquad \ddot{z}(0) = \ddot{z}(T)$$

otteniamo

$$\int_0^T P(t)\,dt = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int_0^T \dddot{z}(t)\,\dot{z}(t)\,dt.$$

Qeusta è la potenza irraggiata in un periodo, cioè l'energia (una potenza integrata sul tempo ha le dimensioni di un'energia) dissipata per l'emissione spontanea in un periodo e noi la vogliamo uguagliare al lavoro compiuto da una forza ritardatrice fittizia sul sistema in un periodo (faccio un cambio di variabile per far diventare il lavoro un integrale nel tempo) :

$$\int F_r \, dz = \int_0^T F_r(t) \, \frac{dz}{dt} \, dt = \int_0^T F_r(t) \, \dot{z}(t) \, dt$$

per trovare la forza ritardatrice impongo che i due integrali siano uguali

$$\int_0^T F_r(t) \, \dot{z}(t) \, dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_0^T \dddot{z}(t) \, \dot{z}(t) \, dt$$

da cui

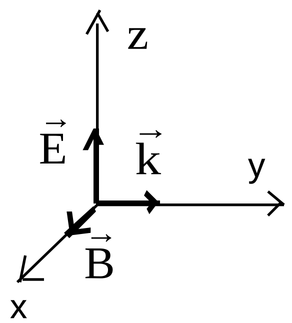
$$F_r(t) = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dddot{z}(t)$$ **forza ritardatrice**

nota : spesso, considerato che z(t) deve essere una funzione oscillante (seno o coseno), si sostituisce la derivata terza con la derivata prima, che è uguale a meno di fattori costanti.

b) forza dovuta all'onda elettromagnetica incidente

Consideriamo ora un'onda elettromagnetica incidente sul sistema, che possiede **frequenza w** in linea di principio diversa dalla frequenza propria dell'oscillazione armonica dell'elettrone.
Per descrivere l'onda, cioè i suoi campi, usiamo una notazione complessa : descriviamo le grandezze con dei numeri complessi, con una certa ampiezza ed una certa fase, di cui però ha significato fisico solo la parte reale.

Consideriamo un'onda elettromagnetica polarizzata linearmente lungo z (cioè il campo elettrico oscilla lungo z) e propagantesi lungo y :



Espressione dei campi dell'onda :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(ky - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(ky - \omega t)}$$

nota: l'onda descritta con $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(ky - \omega t)}$ e $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(ky - \omega t)}$ è un'onda piana perché le superfici a fase costante sono dei piani, perpendicolari alla direzione di propagazione. Inoltre la lunghezza d'onda compare 'dentro' il vettore d'onda k.

Approssimazioni

(queste approssimazioni sono le stesse che si fanno nella teoria perturbativa semiclassica).

i) campi quasi costanti nello spazio
Supponiamo che la lunghezza d'onda della radiazione è molto maggiore delle dimensioni lineari del sistema. Sicuramente questo è vero per la radiazione visibile, dove l ≈ 1000 Å, mentre il raggio atomico è ≈ 1 Å, dunque le dimensioni lineari del sistema sono 1000 volte più piccole della lunghezza d'onda.

Dunque l'approssimazione che faremo è di considerare entrambi i campi come costanti nello spazio.
Più formalmente possimo dire che espandiamo in serie di potenze gli esponenziali e^{-iky} che compaiono nelle espressioni dei campi, e tronchiamo lo sviluppo al prim'ordine :
$e^{-iky} \approx 1$ (questo corrisponde all'approssimazione di dipolo elettrico).

ii) forza magnetica (forza di Lorentz) trascurabile
Una seconda approssimazione da fare è quella di trascurare l'effetto del campo magnetico.
Infatti, le forze che agiscono sull'elettrone oscillante sono

$$- e \vec{E} \qquad \text{forza elettrica}$$

$$-\frac{e \vec{v}}{c} \times \vec{B} \qquad \text{forza di Lorentz}$$

e nell'ipotesi che la velocità di oscillazione dell'elettrone è molto minore di c, la forza di Lorentz si può trascurare.

In definitiva la forza (approssimata) che agisce sull'atomo ad opera dell'onda elettromagnetica incidente è :

$$F_{el}(t) = - e E(t)$$

$$= - e E_0 e^{i \omega t}.$$

c) forza elastica

Infine, seguendo il modello di Lorentz, consideriamo anche la forza elastica di richiamo responsabile dell'oscillazione degli elettroni :

$$F_{el}(t) = - m \omega_0^2 z(t).$$

- Equazione del moto -

A questo punto, procediamo con l'approccio newtoniano, e scriviamo l'eqazione del moto (secondo principio : "F=ma").

Ricapitolando, le forze che agiscono sull'elettrone sono :

- la forza elettrica dovuta al campo dell'onda incidente
- la forza 'elestica' di richiamo responsabile dell'oscillazione armonica attorno alla posizione di equilibrio
- la forza ritardatrice (fittizia) che è un modo per tenere conto del fatto che l'elettrone emette a sua volta un'onda elettromagnetica

dunque l'equazione del moto (secondo principio della dinamica) si scrive

$$- e E_0 e^{i \omega t} - m \omega_0^2 z(t) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dddot{z}(t) = m \ddot{z}(t)$$

(equazione del moto della carica (elettrone))
(?)(non mi trovo col segno della forza ritardatrice)

si tratta di un'equazione differenziale in z(t).
Riordinando

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dddot{z}(t) - m \ddot{z}(t) - m \omega_0^2 z(t) = e E_0 e^{i \omega t}$$

dunque si tratta di un'equazione differenziale lineare ordinaria, a coefficienti costanti, ma <u>non omogenea</u>.

La soluzione di una tale equazione differenziale è la somma delle n soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata (integrale generale), più una soluzione della non omogenea (integrale particolare).

Proposizione
E' possibile non considerare le n soluzioni della omogenea associata, in quanto le costanti della combinazione lineare delle n soluzioni dell'omogenea associata devono essere tutte nulle.

<u>dim.</u>

Qualunque sia l'espressione del 'termine noto', è comunque una funzione del tempo.
D'altra parte i termini di quest'equazione rappresentano le forze agenti sul sistema (poi c'è il termine 'massa per accelerazione').
Il termine noto, che è l'unica forza non dipendente dalla posizione, ma solo dal tempo, la possiamo pensare come una perturbazione (dipendente dal tempo) che agisce sul sistema <u>a partire da un certo istante t_0</u>.
Ciò significa che ad un istante precedente, quando questa perturbazione non c'è, la dinamica del sietema è data da una equazione differenziale omogenea, la cui soluzione è una combinazione lineare, di cui si devono stabilire i coefficienti.
Per farlo si può osservare che qundo non è presente l'onda, le altre forze agenti sul sistema, a parte un periodo di 'assestamento' si annullano : la forza 'di richiamo' dell'oscillazione armonica riporta l'elettrone nella posizione centrale, fermo, e dunque questo non emette più, e quindi si annula anche la forza ritardatrice che dava conto dell'emissione.
Dunque in assenza di forze esterne il sistema starà in quiete.
Allora per $t < t_0$ si deve avere la soluzione banale costantemente nulla.
Ma poiché i coefficienti della soluzione sono costanti, saranno nulli anche ad ogni altro istante.

C.V.D.

Dunque non ci interessa calcolare l'integrale generale (soluzione dell'omogenea associata), ma solo l'integrale particolare, cioé una soluzione dell'equazione non omogenea.

E' facile vedere che una funzione del tipo

$$z(t) = z_0 e^{i w t}$$

con z_0 costante (complessa) da determinare, è soluzione dell'equazione non omogenea (la derivata di un esponenziale è ancora un esponenziale...) :

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} z_0 \frac{\partial^3}{\partial t^3} e^{i\omega t} - m z_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} - m \omega_0^{\ 2} z_0 e^{i\omega t} = e E_0 e^{i\omega t}$$

Con un pò di algebra si può determinare la costante complessa z_0 :

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} z_0 i^3 \omega^3 e^{i\omega t} - m z_0 i^2 \omega^2 e^{i\omega t} - m \omega_0^{\ 2} z_0 e^{i\omega t} = e E_0 e^{i\omega t}$$

$$-\frac{2}{3} i \frac{e^2}{c^3} z_0 \omega^3 + m z_0 \omega^2 - m \omega_0^{\ 2} z_0 = e E_0$$

$$z_0 = \frac{e E_0}{m\omega^2 - \frac{2}{3} i \frac{e^2}{c^3}\omega^3 - m \omega_0^{\ 2}}$$

In definitiva :

$$z_0 = \frac{e E}{m\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + \gamma \frac{\omega^6}{\omega_0^4}\right]^{1/2}} e^{i\varphi}$$

dove

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\gamma\omega^3}{\omega_0^{\ 2}\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)} \qquad \text{e} \qquad \gamma = \frac{2}{3}\frac{e^2 \omega_0^{\ 2}}{m c^3}.$$

Abbiamo dunque ottenuto il moto (la legge oraria) dell'elettrone :

$$z(t) = \frac{e E}{m\left[\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + \gamma \frac{\omega^6}{\omega_0^4}\right]^{1/2}} e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

- Sezione d'urto -

* Espressione esplicita della potenza irraggiata

A questo punto possiamo infilare la legge oraria nell'espressione trovata prima per la potenza irraggiata (vedi).
Partiamo dalla formula $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^2} \dot{z}^2 \sin^2\theta$ trovata prima, che esprime la potenza irraggiata per unità di angolo solido in funzione della velocità.
Utilizziamo la derivata prima della legge oraria (velocità), e sostituiamola nella formula di cui sopra. Mediando poi su un periodo si ottiene (il prof salta i conti e dà direttamente il risultato) :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi c^3} \frac{e^4\ \omega^4\ E_0^{\ 2}/m^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + \left(\gamma\,\omega^3/\omega_0^{\ 2}\right)^2} \sin^2\theta.$$

Alternativamente potremmo utilizzare la derivata seconda della posizione (accelerazione) e sostituirla direttamente nell'espressione della potenza totale media irraggiata (formula di Larmor)

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{z}^2.$$

* Intensità dell'onda incidente

Ora, ricordiamo che **l'intensità** dell'onda incidente è per definizione **l'energia che passa in un unità di tempo attraverso una superfice unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione** (ed è legata al modulo del vettore di Poynting), e cioè ha le dimensioni di una potenza per unità di superfice, mentre la quantità che abbiamo trovato è la potenza irraggiata dal dipolo oscillante (elettrone) per unità di angolo solido attorno ad una certa direzione individuata dall'angolo azimutale q (non compare l'angolo zenitale f perché c'è simmetria cilindrica) .

L'espressione dell'intensità dell'onda in funzione dei campi è :

$$I = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$$

e, visto che i due campi sono perpendicolari, e il loro modulo medio in un periodo è uguale, mediando su un periodo si ha (c'è un fattore 2 che non sono sicuro, ma credo che venga dal fatto di aver usato il 'metodo dei campi complessi')

$$I = \frac{c}{8\pi}\vec{E}_0^{\ 2} \qquad \text{(intensità media in un periodo)(vedi Fisica II).}$$

Possiamo dunque mettere in evidenza l'intensità dell'onda nell'espressione della potenza per unità di angolo solido, ottenendo il fattore di proporzionalità tra l'intensità dell'onda incidente e la potenza irraggiata dall'atomo per unità di angolo solido attorno ad una certa direzione :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \left[\frac{e^4}{m^2 c^4} \, \frac{\omega^4}{\left[\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\gamma\, \omega^3 / \omega_0{}^2\right)^2 \right]} \, \sin^2 \theta \right] I.$$

Dunque scriviamo

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \, I$$

e per definizione il fattore di proporzionalità è la "**sezione d'urto differenziale**" :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0 \, \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\gamma\, \omega^3 / \omega_0{}^2\right)^2} \, \sin^2 \theta$$

dove

$$r_0 = \frac{e^4}{m^2 c^4}.$$

nota : la definizione di sezione d'urto differenziale data da **Mencuccini-Silvestrini** (vol. I, pag 300-302) è la seguente :

La sezione d'urto differenziale (che ha le dimensioni di un'area) è quella grandezza che moltiplicata per l'energia incidente per unità di area nell'unità di tempo (intensità della radiazione incidente) fornisce l'energia emessa (spontanea e indotta) per unità di angolo solido nell'unità di tempo (potenza per unità di angolo solido) in una certa direzione attorno all'atomo (individuata dal solo angolo zenitale q, perché c'è simmetria cilindrica attorno all'asse del dipolo).
(questa definizione è presa dal Menc. Silv., ma l'ho riveduta e corretta per questo caso, perché lui parla di probabilità di urto e densità di particelle-bersaglio)

Integrando quest'espressione su una sfera otteniamo la **sezione d'urto totale** :

$$\boxed{\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0{}^2 \, \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \left(\gamma\, \omega^3 / \omega_0{}^2\right)^2}} \quad \text{(sezione d'urto totale).}$$

Questa quntità rappresenta dunque il fattore di proporzionalità tra l'intensità della radiazione incidednte (energia per unità di area e per unità di tempo) e l'energia totale per unità di tempo irraggiata dall'atomo (emissione spontanea e indotta) :

$$P(t) = \sigma \; I(t)$$

Questa formula racchiude tutta la fisica dell'irraggiamento del modello classico di atomo (atomo di Lorentz).

- Studio della dipendenza di s da w e w_0 -

Vediamo come dipende questa sezione d'urto dalla frequenza della radiazione incidente, per tre casi notevoli.

• caso $w >> w_0$

In generale, poiché

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^{\,2}\right)^2 + \left(\gamma\, \omega^3 / \omega_0^{\,2}\right)^2} = 0$$

si ha che per grandi frequenze la sezione d'urto va a zero, e questo è logico : se l'onda incidente ha frequenza molto alta, non c'è più interazione (credo) (?) (c'è qualcosa che non mi convince!).

D'altra parte, nell'espressione della sezione d'urto, la quantità g rappresenta gli effetti di 'reazione di radiazione' (cioè il fatto che la radiazione viene ri-diffusa) (credo che qui si debba intendere 'emissione spontanea' cioè la parte di radiazione emessa dall'elettrone in quanto dioplo oscillante, e non semplicemente 'fatta rimbalzare') (?).
Dunque, se mandiamo anche g a zero, trascurando gli effetti di reazione di radiazione (?) si ha

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^{\,2}\right)^2} = 1$$

e dunque, in questo limite (wÆ∞ e gÆ0) si ha :

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^{\,2} = \sigma_T$$

Questa è detta **sezione d'urto degli elettroni liberi, o di Thomson**.
E' detta "degli elettroni liberi" perché stiamo trascurando la frequenza di oscillazione propria w_0, e cioè il fatto che gli elettroni sono legati 'nell'oscillatore armonico'.

Dunque in questa approssimazione, gli atomi ri-diffondono la radiazione incidente in maniera proporzionale al quadrato del 'raggio classico dell'elettrone', tramite un fattore di proporzionalirà che è 8p/3.
E dunque, a meno del fattore 8/3 la sezione d'urto è proprio la sezione geometrica dell'elettrone visto come sfera.

• caso $w \approx w_0$

In questo caso posso fare la seguente approssimazione :

$$w^2 - w_0^2 = (w+w_0)\,(w-w_0) \approx 2\, w_0\, (w-w_0)$$

e dunque

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^{\,2} \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^{\,2}\right)^2 + \left(\gamma\, \omega^3 / \omega_0^{\,2}\right)^2}$$

$$\simeq \sigma_T \frac{\omega_0^{\,4}}{\left[2\,\omega_0\,(\omega-\omega_0)\right]^2 + \left(\gamma\,\omega_0^{\,3}/\omega_0^{\,2}\right)^2} = \sigma_T \frac{\omega_0^{\,4}}{4\,\omega_0^{\,2}\,(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2\,\omega_0^{\,2}} =$$

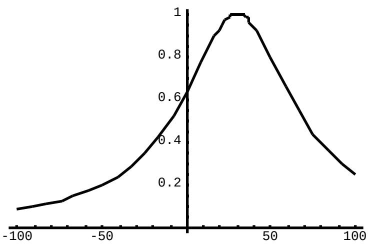
$$= \sigma_T \frac{\omega_0^{\,2}}{4} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \sigma_T \frac{\omega_0^{\,2}}{\gamma^2} \frac{\gamma^2/4}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

(forse c’è un errore da parte mia nel copiare alla lavagna, o è uno sbaglio del prof., ma il prof al numeratore si trova w_0^4, inoltre il quadrato che sta sulla parentesi al denominatore, sugli appunti compare all’interno, solo su w_0. verificare)

Concludendo

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\gamma^2/4}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$ (profilo lorentziano)

Graficando s in funzione di w si ottiene il cosiddetto **profilo Lorentziano**.



(grafico ottenuto con g -> 80, w_0 -> 30)

Proprietà del profilo Lorentziano

- l’integrale su w tra +∞ e -∞ di questa funzione è finito, e dunque la possiamo **normalizzare** (vedi file di Mathematica).

- la s ha un massimo in w = w_0, e per valori w = w_0 ± (g/2) vale la metà del valore massimo.

- la s va a 0 per w Æ ±∞ come $1/w^2$.

Commenti

Ricordiamo che il significato fisico di s è di fattore di proporzionalità tra l’intensità (potenza per unità di superfice) della radiazione incidente e la potenza della radiazione emergente.

Dunque, a partà di radiazione incidente, la s descrive lo **spettro di emissione dell’atomo**.

Allora il fatto che la s abbia un profilo Lorentziano ci dice che lo spettro di emissione ha dei massimi sulle 'frequenze proprie' dell'atomo.

Inoltre la larghezza del profilo ci dà la larghezza delle 'bande di emissione'.
Abbiamo visto che la larghezza del profilo 'a metà altezza' è pari a g.

Ora, a temperatura ambiente (T = 300 K) gli atomi hanno un'energia di 10 eV, che corrisponde ad una frequenza $w_0 \approx 10^{16}$ sec^{-1}.
Poiché il raggio classico dell'elettrone è $r_0 = 2.8 \times 10^{-13}$ cm, ricordando l'espressione di g e del raggio classico dell'elettrone

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^{\ 2}}{m\, c^3} \qquad\qquad r_0 = \frac{e^4}{m^2\, c^4}$$

si ha

$$\gamma = \frac{2}{3} \frac{r_0}{c} \omega_0^{\ 2} \approx \frac{10^{-13}\ \text{cm}}{10^{10}\ \text{cm/sec}} \left(10^{16}\right)^2 \text{sec}^{-1} = 10^9\ \text{sec}^{-1}$$

e dunque la larghezza del profilo di emissione è di molti ordini di grandezza minore della frequenza di emissione.
Questo significa che l'emissione è quasi monocromatica, cioè :
l'emissione avviene per righe piuttosto che per bande.

Questo risultato è in accordo con i dati sperimentali, e costituisce 'un successo' del modello atomico di Lorentz, che è un modello classico.

Vedremo che la teoria quantistica arriva (per altre vie) allo stesso risultato : la teoria quantistica "sussume" la teoria classica.

• **caso $w \ll w_0$**

Si può trascurare sia l'w che compare nel primo termine al denominatore di s, sia tutto il secondo termine, e dunque rimane

$$\sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^{\ 2}\right)^2 + \left(\gamma\, \omega^3/\omega_0^{\ 2}\right)^2} \simeq \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^{\ 4}}$$

e dunque a basse frequenze la sezione d'urto va come w^4.

Questo fatto venne usato da Reylegh per spiegare il colore blu del cielo :

poiché le frequenze di risonanza delle molecole che compongono l'atmosfera sono molto più alte delle frequenze del visibile, e poiché la diffusione in questa approssimazione decresce come la quarta potenza della frequenza della radiazione incidente, la frequenza del blu è <u>molto</u> più diffusa della frequenza del rosso.