Appendice A

Teorema di Wigner-Eckart

Si darà qui la dimostrazione del teorema tenendo presente lo scopo che ci si prefigge in §1.9.

La dimostrazione è essenzialmente di carattere algebrico.

Si parta dall'elemento di matrice della componente γ dell'operatore vettoriale, tra due autovettori diversi, ma con lo stesso valore di J. Per semplicità nel seguito si userà M al posto di M_J:

$$\langle \lambda', J, M' \mid A_\gamma \mid \lambda, J, M \rangle$$

Utilizzando ora la relazione di commutazione:

$$\begin{aligned}
i\langle \lambda', J, M' \mid A_\gamma \mid \lambda, J, M \rangle &= \langle \lambda', J, M' \mid [A_\alpha, J_\beta] \mid \lambda, J, M \rangle = \\
&= \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha J_\beta - J_\beta A_\alpha \mid \lambda, J, M \rangle = \\
&= \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha J_\beta \mid \lambda, J, M \rangle - \langle \lambda', J, M' \mid J_\beta A_\alpha \mid \lambda, J, M \rangle
\end{aligned}$$

Tenendo ora presente la relazione di completezza $\sum_{\lambda,J,M} |\lambda, J, M\rangle\langle \lambda, J, M| = \mathbb{I}$ si possono continuare le catene di uguaglianza come segue:

$$\begin{aligned}
&= \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha \mathbb{I} J_\beta \mid \lambda, J, M \rangle - \langle \lambda', J, M' \mid J_\beta \mathbb{I} A_\alpha \mid \lambda, J, M \rangle = \\
&= \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha \mid \lambda'', J'', M'' \rangle \langle \lambda'', J'', M'' \mid J_\beta \mid \lambda', J, M' \rangle - \\
&\quad - \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle \lambda', J, M' \mid J_\beta \mid \lambda'', J'', M'' \rangle \langle \lambda'', J'', M'' \mid A_\alpha \mid \lambda', J, M' \rangle = \\
&= \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha \mid \lambda'', J'', M'' \rangle \langle \lambda'', J'', M'' \mid \lambda', J, M' \rangle M - \\
&\quad - \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle \lambda', J, M' \mid \lambda'', J'', M'' \rangle \langle \lambda'', J'', M'' \mid A_\alpha \mid \lambda', J, M' \rangle M'' =
\end{aligned}$$

Ora, l'autobase è ortonormale, pertanto la precedente diventa:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha \mid \lambda'', J'', M'' \rangle \delta_{\lambda'',\lambda} \delta_{J'',J} \delta_{M'',M} M - \\
&\quad - \sum_{\lambda'', J'', M''} \delta_{\lambda',\lambda''} \delta_{J,J''} \delta_{M',M''} \langle \lambda'', J'', M'' \mid A_\alpha \mid \lambda', J, M' \rangle M'' = \\
&= \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha \mid \lambda, J, M \rangle M - \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha \mid \lambda, J, M \rangle M''
\end{aligned}$$

ovvero, in definitiva:

$$i\langle \lambda', J, M' \mid A_\gamma \mid \lambda, J, M \rangle = \langle \lambda', J, M' \mid A_\alpha \mid \lambda, J, M \rangle (M - M'')$$

In analogia ai momenti angolari, è possibile definire gli operatori $A_+ = (A_x + iA_y)$ e $A_- = (A_x - iA_y)$ e dimostrare semplicemente che vale:[1]

$$[A_+, J_z] = -A_+ \qquad\qquad [A_+, J_+] = 0$$

Con passaggi analoghi ai precedenti, dalla prima relazione di commutazione si può ottenere la relazione:

$$\begin{aligned}\langle\lambda', J, M' \mid A_+ \mid \lambda, J, M\rangle = \langle\lambda', J, M' \mid A_+ \mid \lambda, J, M\rangle(M - M') \rightarrow \\ \rightarrow \langle\lambda', J, M' \mid A_+ \mid \lambda, J, M\rangle(M - M' - 1) = 0\end{aligned}$$

poiché un prodotto è nullo se uno dei due fattori è nullo, questa relazione dice che l'operatore A_+ ha lo stesso effetto sugli autostati di J^2 e J_z dell'operatore J_+, perché gli elementi di matrice di A_+, rappresentati nell'autobase di J^2 e J_z, sono non nulli solo se M è più piccolo di M' di un unità.

Dalla seconda relazione di commutazione, tramite i soliti passaggi con la relazione di completezza, si giunge a:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda'', J'', M''} \langle\lambda', J, M' \mid A_+ \mid \lambda'', J'', M''\rangle\langle\lambda'', J'', M'' \mid J_+ \mid \lambda, J, M\rangle - \\ - \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle\lambda', J, M' \mid J_+ \mid \lambda'', J'', M''\rangle\langle\lambda'', J'', M'' \mid A_+ \mid \lambda, J, M\rangle = 0\end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà di J_+, e quella analoga appena dimostrata per A_+ si conclude che, in entrambe le somme solo un addendo è non nullo e dunque tutta la relazione si può ridurre a questi termini:

$$\begin{aligned}\langle\lambda', J, M+2 \mid A_+ \mid \lambda, J, M+1\rangle\langle J, M+1 \mid J_+ \mid J, M\rangle - \\ - \langle J, M+2 \mid J_+ \mid J, M+1\rangle\langle\lambda', J, M+1 \mid A_+ \mid \lambda, J, M\rangle = 0\end{aligned}$$

Si noti che in ogni elemento di matrice gli M differiscono di una unità. Poiché questo risultato deve valere per tutti i valori di M, ne consegue che gli elementi di matrice di A_+ e J_+ sono proporzionali, e che il fattore di proporzionalità dipende da λ, λ' e J, ma non dipenda da M:

$$\langle\lambda', J, M' \mid A_+ \mid \lambda, J, M\rangle = k(\lambda, \lambda', J)\langle J, M' \mid J_+ \mid J, M\rangle$$

Si è quindi dimostrata la tesi per l'operatore A_+ che, si ricordi, è una combinazione lineare di A_x e A_y.

Si dimostrerà ora la tesi per la componente A_z.

Sempre in maniera diretta è possibile dimostrare la relazione di commutazione $[A_+, J_-] = 2A_z$ mentre è già nota la relazione per i momenti angolari $[J_+, J_-] = 2J_z$.

A partire da queste relazioni di commutazione e tramite i soliti passaggi si arriva a:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda'', J'', M''} \langle\lambda', J, M' \mid A_+ \mid \lambda'', J'', M''\rangle\langle\lambda'', J'', M'' \mid J_- \mid \lambda, J, M\rangle - \\ - \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle\lambda', J, M' \mid J_- \mid \lambda'', J'', M''\rangle\langle\lambda'', J'', M'' \mid A_+ \mid \lambda, J, M\rangle = \\ = 2\langle\lambda', J, M' \mid A_z \mid \lambda, J, M\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda'', J'', M''} k\langle\lambda', J, M' \mid \lambda'', J'', M''+1\rangle\langle\lambda'', J'', M''+1 \mid \lambda, J, M\rangle - \\ - \sum_{\lambda'', J'', M''} \langle\lambda', J, M' \mid \lambda'', J'', M''-1\rangle\langle\lambda'', J'', M''-1 \mid \lambda, J, M\rangle k = \\ = 2\langle\lambda', J, M' \mid A_z \mid \lambda, J, M\rangle\end{aligned}$$

[1]Basta esplicitare commutatore e definizione.

Analogamente, partendo dalla seconda regola di commutazione si ha:

$$\sum_{\lambda'',J'',M''} \langle \lambda', J, M' \mid J_+ \mid \lambda'', J'', M'' \rangle \langle \lambda'', J'', M'' \mid J_- \mid \lambda, J, M \rangle -$$
$$- \sum_{\lambda'',J'',M''} \langle \lambda', J, M' \mid J_- \mid \lambda'', J'', M'' \rangle \langle \lambda'', J'', M'' \mid J_+ \mid \lambda, J, M \rangle =$$
$$= 2\langle \lambda', J, M' \mid J_z \mid \lambda, J, M \rangle$$

$$\sum_{\lambda'',J'',M''} \langle \lambda', J, M' \mid \lambda'', J'', M'' + 1 \rangle \langle \lambda'', J'', M'' + 1 \mid \lambda, J, M \rangle -$$
$$- \sum_{\lambda'',J'',M''} \langle \lambda', J, M' \mid \lambda'', J'', M'' - 1 \rangle \langle \lambda'', J'', M'' - 1 \mid \lambda, J, M \rangle =$$
$$= 2\langle \lambda', J, M' \mid J_z \mid \lambda, J, M \rangle$$

Mettendo insieme i due risultati si può concludere che:

$$\langle \lambda', J, M' \mid A_z \mid \lambda, J, M \rangle = k(\lambda', \lambda, J) \langle \lambda', J, M' \mid J_z \mid \lambda, J, M \rangle$$

Si è dunque dimostrata la tesi per la componente z.

Adesso si possono ripetere per l'operatore A_- i passaggi effettuati per l'operatore A_+, concludendo che A_- si comporta come J_- e che i loro due elementi di matrice sono proporzionali a meno di in certo fattore k' che dipende da λ, λ' e J, ma non da M. Tuttavia, per la stessa via si può arrivare alla proporzionalità tra A_z e J_z, e quindi si può stabilire che $k = k'$, cioé che la costante di proporzionalità è la stessa. Dalla proporzionalità tra A_+ e J_+ e tra A_- e J_- si può poi dimostrare la proporzionalità tra A_x e J_x e tra A_y e J_y, di cui sono combinazione lineare. Tutti sono proporzionali tramite lo stesso fattore k.

Avendo dimostrato la proporzionalità di tutte le componenti, la tesi è dimostrata.