Cavità ottiche

(lezione 18)

- **Introduzione** (t 1h 19' 38")

Per un risuonatore elettromagnetico (antenna) è possibile progettare la lunghezza dell'apparato pari alla (metà o 1/4 della) lunghezza d'onda, e dunque il risuonatore risuona su un singolo modo (modo fondamentale), quello di interesse.

> (ricordiamo che un modo è caratterizzato sia dalla frequenza che dal vettore d'onda, cioè dalla direzione di propagazione. Tuttavia qui (credo) per ora pensiamo solo alla frequenza/lunghezza d'onda)

Per un risuonatore ottico, poiché la lunghezza d'onda è troppo piccola (dell'ordine del micron, o meno), questo non è possibile, e dunque il modo di interesse sarà un modo di ordine (molto) superiore, cioè un multiplo (alto) del modo fondamentale del risuonatore.

Altra considerazione : quando si studia il campo elettromagnetico in una cavità chiusa, vediamo che, anche se si lavora con una banda abbastanza stretta, si ha a che fare sempre con <u>un numero altissimo di modi</u>.

Se per esempio consideriamo solo una banda di 1 MHz attorno ad una frequenza del visibile (5×10^{14} Hz), seguendo la formula di Reylegh la densità di modi è :

$$\Delta N = \frac{V}{2\,\pi^2\,c^3}\,\omega^2\,\Delta\omega$$ (densità dei modi in una cavità)

e dunque, se ν è dell'ordine del visibile, e la larghezza di banda è di 1 megahertz, si ha :

$$\nu = 5 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

$$\Delta\nu = 10^6\ \text{Hz}$$

$$\frac{\Delta N}{V} = \frac{\omega^2}{2\,\pi^2\,c^3}\,\Delta\omega$$

$$= \frac{(2\pi\,\nu)^2}{2\,\pi^2\,c^3}\,2\,\pi\,\Delta\nu$$

$$= \frac{8\ \pi^3 \left(5\ \text{x}\ 10^{14}\right)^2 \cdot 10^6\ (\text{Hz})^3}{2 \cdot \pi^2 \cdot \left(3\ \text{x}\ 10^8\right)^3 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3}$$

$$= 4\ \pi\ \frac{5\ \text{x}\ 10^{34}\ (\text{s})^{-3}}{(\text{m})^3}$$

$$\approx 6\ \text{x}\ 10^{10}\ \frac{\text{modi}}{\text{m}^3} = 6\ \text{x}\ 10^7\ \frac{\text{modi}}{\text{litro}}$$ (densità di modi).

Dunque, anche se lavoriamo con una banda abbastanza stretta abbiamo a che fare con un numero altissimo di modi.
Inoltre teniamo presente che i diversi modi possono differire oltre che per la frequenza anche per il vettore d'onda, dunque per la direzione di propagazione.

Queste considerazioni ci portano a due *conclusioni* riguardo ai risuonatori ottici (cavità ottiche) :

a) le dimensioni della cavità sono molto maggiori della lunghezza d'onda, e dunque avremo a che fare non con gli automodi fondamentali della cavità, ma con gli *automodi di ordine elevato*

b) conviene lavorare con cavità aperte, e in generale fare in modo che il fattore di merito Q (vedi) di alcuni modi sia molto maggiore degli altri, in modo da sopprimere i modi che non interessano.

- **Le perdite**

Con l'espressione «cavità aperte» si intende sia il fatto che non tutto il volume in questione è 'chiuso da pareti riflettenti', sia che alcune pareti riflettenti (specchi) hanno una riflettività non del 100%.

Anche se due pareti opposte e parallele avessero riflettività del 100%, la radiazione propagandosi dall'una all'altra, per fenomeni di diffrazione in parte comincerebbe a dirigersi verso le 'pareti mancanti.

L'effetto totale delle pareti mancanti e della riflettività finita degli specchi va sotto la definizione di «perdite della cavità».

A causa delle perdite si parla di vita media dei fotoni nella cavità.

A causa di questo fenomeno di 'perdita', il campo nella cavità 'aperta' presenta un termine (esponenziale) di attenuazione :

$$\vec{E}(\vec{r},\ t) = E_0\ \vec{u}(\vec{r})\ e^{i\omega t} \qquad \text{(radiazione nel vuoto)}$$

$$\vec{E}(\vec{r},\ t) = E_0\ \vec{u}(\vec{r})\ e^{i\omega t}\ e^{-\frac{t}{2\tau_c}} \qquad \text{(radiazione in cavità con perdite)}$$

dove t_c è detto tempo di vita medio del fotone nella cavità.

Oggi esistono cavità passive talmente buone che il cammino nella cavità arriva a decine di chilometri.

- **La coerenza** (lezione 19)

Se in un sistema quantistico a tre livelli, grazie all'inversione di popolazione, provochiamo un'emissione stimolata di radiazione, questo non ci fornisce ancora una radiazione laser.

Infatti a questo stadio la radiazione è molto 'larga in frequenza' (non monocromatica).
Se il mezzo attivo è *gassoso*, i livelli energetici degli elettroni sono abbastanza stretti in energia, e dunque la larghezza in frequenza della radiazione stimolata emessa è dovuta soprattutto all'allargamento Doppler.
Se il mezzo è un solido la larghezza di banda di emissione è dovuta anche al fatto che lo spettro di energia degli elettroni nel reticolo cristallino di un solido è uno spettro a bande!

Inoltre questa radiazione ha una direzione di propagazione sparpagliata (non parassiale).
Infatti i fotoni che vengono fuori per emissione stimolata possono essere emessi in linea di principio in tutte le direzioni.

Per entrambi gli aspetti si parla di (mancanza di) coerenza.
In particolare si parla di di coerenza spettrale (quasi monocromaticità) e coerenza spaziale (quasi parassialità).

Per ovviare ad entrambi i problemi si mette il mezzo attivo in una ***cavità*** (costituita essenzialmente da due specchi).

La cavità fa si che solo la radiazione che viaggia lungo il suo asse sia favorita, e inoltre che i fotoni appartengano (quasi) tutti ad un unico modo.

Così si ottiene una radiazione coerente sia spazialmente che rispetto alla frequenza (monocromatica).

Ricordiamo che, anche se la cavità 'seleziona' dei modi elettromagnetici, la banda di emissione del mezzo attivo rimane quella che è.
Dunque cambiando i parametri della cavità si possono 'favorire' modi elettromagnetici diversi (tunable lasers o laser accordabili (t 4'15")).
Allora in linea di principio che la banda di emissione 'propria del mezzo attivo' sia larga è anche un fatto positivo, perché possiamo 'tunare' tra un gran numero di frequenze.
Questa 'banda di emissione del mezzo attivo' viene chiamata *curva di guadagno*.

Tenere presente che per i mezzi gassosi (ad es. elio-neon) la banda è comunque piccola, essendo la sua larghezza per lo più dovuta allargamento Doppler.
Il discorso vale soprattutto per i laser a dye.

- Tipi di Cavità (t 6' 10")

- cavità Fabry-Perot

Cavità fatta con due specchi piani e paralleli.
Per questo tipo di cavità possiamo usare l'ottica geometrica, cioè descrivere la radiazione con i 'raggi'.
Ricordiamo che i fronti d'onda sono le superfici 'equifase', luogo dei punti a fase costante.
I raggi sono le rette perpendicolari ai fronti d'onda, e dunque in qualche modo 'hanno memoria' dell'aspetto ondulatorio della radiazione.

In ottica geometrica si trascura di descrivere l'aspetto ondulatorio della radiazione.

In linea di principio la luce potrebbe rimbalzare indefinitamente tra i due specchi.
In realtà ciò non avviene, essenzialmente per due fatti :

a) gli specchi non sono perfettamente piani e paralleli

b) gli specchi non sono infinitamente riflettenti.

Apriamo una parentesi sulla lavorazione ottica :
In tutti i componenti ottici si parla di lavorazione ottica.
La qualità di tale lavorazione si esprime in 'frazioni di lunghezza d'onda'.
Questo significa che ad esempio una superficie lavorata a $\lambda/4$ è tale che la dimensione quadratica media delle imperfezioni della superficie è dell'ordine di $\lambda/4$ della lunghezza d'onda con la quale si vuole lavorare.
Si possono ottenere superfici a $\lambda/10$ o a $\lambda/20$.

Studieremo in dettagli più avanti la cavità Fabry Perot

- cavità concentriche (t10’00”)

Le cavità a specchi piani sono molto sensibili agli errori di allineamento.
Le cavità con specchi sferici lo sono molto di meno.

Consideriamo due specchi sferici con un certo raggio di curvatura R_1 e R_2 rispettivamente. La cavità concentrica si realizza mettendo a distanza $R_1 + R_2$ i due specchi, in modo che i due centri di curvatura coincidano.

La situazione più semplice è quella in cui i due raggi di curvatura sono uguali.

In questo caso i raggi luminosi coincidono con i raggi di curvatura delle calotte sferiche.
i fronti d’onda invece ‘matchano’ le superfici degli specchi.

- cavità confocali (t12’00’)

Si tratta sempre di una cavità realizzata con due specchi sferici, ma questa volta vengono fatti coincidere i fuochi, anzicché i centri di curvatura.

Se consideriamo il caso più semplice in cui i due raggi di curvatura sono uguali a R, questo significa mettere i due specchi con i ‘vertici’ a distanza R.
Infatti ricordiamo che il fuoco di uno specchi sferico capita a $R/2$, e dunque il centro della cavità rappresenta il fuoco per entrambi gli specchi.

Per definizione di fuoco un raggi che passaper il centro della cavità e arriva su uno specchi, viene da questo riflesso parallelamente all’asse della cavità.
Viceversa un raggio che arriva su uno specchi parallelamente all’asse della cavità viene riflesso in direzione del centro della cavità (fuoco).

In questo modo il round trip (percorso di un raggio per ritornare su se stesso) è fatto di 4 passaggi.

In questo tipo di cavità non si può più usare la descrizione fatta con i fronti d’onda, perché in qualche modo c’è un mescolamento.

Esistono poi cavità emifocali o emisferiche, fatte con uno specchi sferico e uno piano.

(vedi figure a pag 361 e 362)

- cavità instabili

Le cavità che abbiamo visto fino qui hanno tutte la caratteristica che, a meno delle *perdite*, un raggio luminoso che comincia a essere riflesso tra uno specchio e l'altro, può rimanere indefinitamente dentro la cavità, in genere in traiettorie prossime all'asse ottico.

Esistono altre geometrie di cavità che non hanno questa caratteristica, e sono dette instabili.
In tali cavità un raggio esce comunque fuori dalla cavità dopo un certo numero di riflessioni, al di là delle perdite per la non totale riflettività degli specchi o per difetti di allineamento, o per aplanarità.

Tra le cavità instabili ci sono quelle fatte con uno specchio convesso e uno concavo, o uno convesso e uno piano, o entrambi convessi.

Un'aspetto delle cavità instabili è che non occorre che uno dei due specchi abbia riflettività non infinita.
D'altra parte però questo comporta che il raggio laser che viene fuori ha in genrere un 'buco' centrale, che è l'ombra dello specchio (pernsa al telescopio Cassegrain, ma qui la diffrazione è molto meno).
(vedi figure a pag 363)

Un'altro aspetto è che i raggi luminosi, prima di uscire dalla cavità, 'spazzano' un pò tutto il volume della cavità, e questo può essere utile se si ha a disposizione un mezzo attivo di grande volume, e lo si vuole 'utilizzare' tutto.

Per queste caratteristiche laser con cavità instabili vengono usati per il taglio di lamiere : sono laser di potenza, che tirano puori diversi kilovatt.

- **Studio delle cavità aperte** (t 18' 40")

(nota : anche se a rigore la cavità Fabry-Perot è quella a specchi piani e paralleli, a volte si chiamano 'Fabry-Perot' in generale le cavità ottiche (aperte))

Quello che vogliamo fare è adesso studiare in un certo dettaglio come è fatto il campo elettromagnetico all'interno di una cavità aperta, quali sono le frequenze dei modi elettromagnetici 'permessi' all'interno della cavità, e quantificare le perdite.

Rcapitolando, gli aspetti che vogliamo studiare sono tre :
i campi
i modi permessi (frequenze)
le perdite.

Abbiamo già accennato al fatto che non è possibile usare una descrizione con i fronti d'onda.

- densità dei modi

Partiamo dal considerare una cavità parallelepipedica chiusa, con pareti interne riflettenti.
Richiamaiamo il conto, fatto a struttura, del campo di corpo nero.

Consideriamo una cavità a forma di prisma quadrato, in cui le due basi quadrate (che in seguito diventeranno gli specchi della cavità aperta) hanno lato di lughezza $2a$ e la distanza tra loro è d (lunghezza della cavità).
L'asse z è disposto perpendicolarmente alle faccie quadrate.

Se si risolvono le *equazioni di Maxwell,* in un mezzo, in assenza di cariche :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon \vec{E} \right) = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo l'equazione delle onde generalizzata :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t^2} \vec{E} = -\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \vec{E} \cdot \nabla \varepsilon \right).$$

In un mezzo isotropo, e supponendo per il campo la forma :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re e \left[\vec{E}_0(\vec{r}) \, e^{i \omega t} \right]$$

si ottiene l'equazione di Helmoltz :

$$\nabla^2 \vec{E}_0 + k^2 \vec{E}_0 = 0$$

dove

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

che è la relazione di dispersione (che vale solo nel vuoto!).

Con le condizioni al contorno che impone il fatto che siamo in una cavità con pareti conduttrici : campo sui bordi perpendicolare alle pareti, in modo che il lavoro sulle cariche nel conduttore sia nullo si conclude che le soluzioni possibili per il campo elettrico hanno la seguente forma

$$\begin{cases} E_x = e_x \cos k_x x \; \sin k_y y \; \sin k_z z \\ E_y = e_y \sin k_x x \; \cos k_y y \; \sin k_z z \\ E_z = e_z \sin k_x x \; \sin k_y y \; \cos k_z z \end{cases}$$

dove i ‘parametri’ k_i (componenti del vettore d’onda) possono assumere solo i seguenti valori discreti :

$$\begin{cases} k_x = l \dfrac{\pi}{2a} \\ k_y = m \dfrac{\pi}{2a} \\ k_z = n \dfrac{\pi}{d} \end{cases}$$

dove l, m, n sono numeri interi, e dove le dimensioni della cavità nelle direzioni x, y e z sono rispettivamente $2a$, $2a$ e d.

Queste ‘soluzioni possibili’ delle equazioni di Maxwell vengono dette «modi elettromagnetici» : ogni vettore d’onda possibile identifica un modo elettromagnetico.

Ricordando che la relazione di dispersione nel vuoto è :

$$\omega = k\,c$$

dove

$$k^2 = \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)$$

è il modulo quadro del vettore d’onda, possiamo risalire alle frequenze possibili :

$$\nu^2_{l,\,m,\,n} = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^2 \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)$$

dove gli indici interi identificano il modo.

- **degenerazione**

Osserviamo subito che rispetto alla frequenza c'è una degenerazione : i modi che hanno valori degli 'indici trasversi' tali che $(l^2 + m^2) = \text{cost}$ hanno la stessa frequenza!

Osserviamo che l'indice n è legato alla componente del vettore d'onda diretta lungo l'asse della cavità.
Per questo motivo si chiamano «modi longitudinali» i modi identificati dall'indice n.

Per identificare un modo si possono dare i tre interi $n\ l\ m$.
Ad esempio $n,0,0$ è il modo longitudinale di ordine n 'fondamentale' (rispetto ai modi trasversi).

Essendo $\omega = k\,c$ si ha che le frequenze permesse sono :

$$\nu^2_{l,\,m,\,n} = \left(\frac{c}{2\,\pi}\right)^2 \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right).$$

- **ipotesi di Schalow e Townes** (approssimazione parassiale) (24' 15")

Fin qui il discorso è rigoroso ed è fatto per una cavità <u>chiusa</u>.

Schalow e Townes proposero la seguente ipotesi :
se si considera una cavità aperta, costituita cioè solo da due specchi piani paralleli quadrati di lato 2a e a distanza d, nell'ipotesi $a<<d$, i modi elettromagnetici 'che sopravvivono' (cioè che rimangono nella cavità) sono quelli per cui k_x, k_y sono molto piccoli, ossia dei modi il cui vettore d'onda è diretto quasi parallelamente all'asse della cavità, con delle componenti trasverse trascurabili :

$$\vec{k} = \left\{\varepsilon k_x, \varepsilon k_y, k_z\right\}$$

con ε tendente a zero.
Questa è dunque chiamata anche approssimazione parassiale.

In queste ipotesi possiamo sfruttare la piccolezza delle componenti trasversali del vettore d'onda per ottenere un'espressione approssimata della frequenza, facendo uno sviluppo in serie :

$$\nu^2_{l,\,m,\,n} = \left(\frac{c}{2\,\pi}\right)^2 \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)$$

$$\nu_{l,\,m,\,n} = \frac{c}{2\,\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\square_{l,\,\mathrm{m},\,\mathrm{n}} = \frac{c}{2\,\square}\sqrt{\left(l\,\frac{\square}{2\,a}\right)^2 + \left(\mathrm{m}\,\frac{\square}{2\,a}\right)^2 + \left(\mathrm{n}\,\frac{\square}{d}\right)^2}$$

$$\square_{l,\,\mathrm{m},\,\mathrm{n}} = \frac{c}{2\,\square}\,\square\,\sqrt{\frac{l^2}{4\,a^2} + \frac{\mathrm{m}^2}{4\,a^2} + \frac{\mathrm{n}^2}{d^2}}$$

$$\square_{l,\,\mathrm{m},\,\mathrm{n}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{l^2 + \mathrm{m}^2}{4\,a^2} + \frac{\mathrm{n}^2}{d^2}}$$

$$\square_{n,\,l,\,\mathrm{m}} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{n}^2}{d^2}\left(1 + \frac{l^2 + \mathrm{m}^2}{4\,a^2}\,\frac{d^2}{\mathrm{n}^2}\right)}$$

$$\square_{n,\,l,\,\mathrm{m}} = \frac{c}{2}\,\frac{\mathrm{n}}{d}\sqrt{\left(1 + \frac{l^2 + \mathrm{m}^2}{4\,a^2}\,\frac{d^2}{\mathrm{n}^2}\right)}$$

ora, poniamo

$$x \equiv \frac{l^2 + \mathrm{m}^2}{4\,a^2}\,\frac{d^2}{\mathrm{n}^2}$$

da cui

$$\square_{n,\,l,\,\mathrm{m}} = \frac{c}{2}\,\frac{\mathrm{n}}{d}\sqrt{(1 + x)}.$$

Nell'ipotesi di parassialità, sappiamo che gli indici delle componenti trasversali del vettore d'onda, sono molto minori di quello della componente longitudinale :

$$(l+\mathrm{m}) \ll \mathrm{n} \quad \square \quad x \ll 1$$

e dunque possiamo approssimare allo sviluppo in serie al prim'ordine :

$$\square_{n,\,l,\,\mathrm{m}} \simeq \frac{c}{2}\,\frac{\mathrm{n}}{d}\left(1 + \frac{1}{2}\,x\right)$$

$$\square_{n,\,l,\,\mathrm{m}} \simeq \frac{c}{2}\,\frac{\mathrm{n}}{d}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{l^2 + \mathrm{m}^2}{4\,a^2}\,\frac{d^2}{\mathrm{n}^2}\right).$$

In definitiva, queste sono le <u>frequenze dei modi 'permessi'</u> in una cavità aperta.

- **Free Spectral Range** (t 26' 30")

Adesso vogliamo stimare la distanza in frequenza tra due modi longitudinali contigui, associati cioè a due valori successivi dell'indice n.
Per la frequenza ν usiamo l'espressione :

$$\nu_{n,\,l,\,\mathrm{m}} = \frac{c}{2}\,\frac{n}{d}\sqrt{\left(1 + \frac{l^2 + m^2}{4\,a^2}\,\frac{d^2}{n^2}\right)}$$

che non è approssimata.

Quello che ci interessa è la differenza in frequenza tra due modi longitudinali 'contigui', cioè con indice n che differisce di un'unità.
Per semplicità consideriamo due modi longitudinali 'fondamentali', per cui cioè gli indici l e m sono nulli.
In tal caso

$$\nu_{n,\,0,\,0} = \frac{c}{2}\,\frac{n}{d}$$

e dunque

$$\Delta\nu_{\mathrm{n}} = \nu_{n+1,\,0,\,0} - \nu_{n,\,0,\,0}$$

$$\Delta\nu_{\mathrm{n}} = \frac{c}{2\,d} \qquad \text{(Free Spectral Range)}$$

Questo parametro, che dipende solo dalla lunghezza della cavità, si definisce "Free Spectral Range".

Tutto il discorso fatto fin qui è nell'ipotesi che all'interno della cavità ci sia il vuoto.
Nel caso in cui ci sia un mezzo bisogna tenere conto del suo indice di rifrazione.
Facendo i conti si ha che il FSR di una cavità con un indice di rifrazione n è :

$$\Delta\nu_{\mathrm{n}} = \frac{c}{2\,d\,n}$$

(attenzione a non confondere questo n con l'indice intero che numera i modi longitudinali).

Se, come capita spesso, nella cavità c'è un mezzo attivo, e questo non riempie tutta la cavità, ma solo una parte.
In questo caso a rigore bisogna fare il conto a pezzi, per ogni porzione della cavità (vuota o col mezzo attivo).

Più semplicemente si può calcolare un indice di rifrazione 'efficace' per tuta la cavità, che tenga conto della porzione col mezzo attivo.

Osserviamo che i modi longitudinali sono equispaziati, e che questa spaziatura dipende dalla lunghezza della cavità.

Facciamo un esempio quantitativo :

se la distanza tra glispecchi è $d = 10\ \text{cm} = 0.1\ \text{m}$ si ha

$$\Delta\nu_n = \frac{3 \times 10^8}{2 \cdot 0.1} = 1.5\ 10^9\ \text{Hz} = 1.5\ \text{GHz}.$$

Questo ci porta alla questione che accennavamo in precedenza.
Consideriamo un laser a He-Ne. Essendo il mezzo attivo un gas, l'allargamento della riga di emissione della transizione del neon è dovuto essenzialmenten all'effetto Doppler (allargamento inomogeneo, (vedi)).
Allora il mezzo attivo emette con un certo profilo di riga, gaussiano, centrato su una certa frequenza (diciamo 5×10^{14} Hz) e con un carrta larghezza.
Abbiamo visto che l'allargamento Doppler è dell'ordine di 1 Ghz.

Se si fa una cavità piccola, la separazione tra i modi longitudinali (FSR) fa in modo che solo pochi (uno) cadano entro questa banda di emissione del mezzo attivo (che viene anche chiamata *curva di guadagno*) e dunque possono 'laserare'.

Dunque, se abbiamo un laser a He-Ne con la cavità lunga 10 cm, abbiamo visto prima dall'esempio numerico che :

$$d\ 10\ \text{cm} \Rightarrow \text{FSR} = 1.5\ \text{GHz}$$

Ma se tra due modi longitudinali c'è una distanza di 1.5 gigahertz, e la larghezza della curva di guadagno è 1 gigahertz, questo vuol dire che il laser può 'laserare' solo su un modo longitudinale.

E quindi ocludendo, il numero di modi che possono laserare (cioè che stanno sotto la curva di guadagno) è direttamente proporzionale alla lunghezza della cavità.

Se ad esempio realizziamo una cavità lunga 1 metro, il FSR viene di 0.15 GHz, e quindi in 1.5 GHz (curva di guadagno) avremmo uan decina di modi longitudinali.

Dunque in questo caso la radiazione emessa da questa cavità lunga non è monocromatica.

Vedremo che esistono comunque dei metodi per eliminare tutti questi modi possibili tranne uno.

Con un altro approccio riusciremo a stimare anche la larghezza in frequenza del singolo modo longitudinale.

Infine, abbiamo descritto i modi (permessi) di una cavità in termini di vettore d'onda e di frequenza, ed è ovvio che possono essere espressi anche in termini di lunghezza d'onda :

$$\nu_{n,0,0} = \frac{c}{2}\,\frac{n}{d} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{n,0,0} = 2\,n\,d$$

- **questione sull'ordine di un modo** (35' 30")

Abbiamo visto che le cavità ottiche 'lavorano' con modi longitudinali di ordine molto alto (perché le lunghezze d'onda ottiche sono molto piccole).

C'è dunque la questione di capire, dato un certo modo longitudinale, qual'è il suo 'ordine', cioè quale multiplo del modo fondamentale della cavità è.

Consideriamo un laser He-Ne (elio-neon) con una cavità con $d = 10$ cm.

La frequenza del laser He-Ne (fissata dalla transizione atomica) è di 0.6 μm , o più precisamente λ = 6328 Å (rosso); dunque, essendo

$$\nu_{n,0,0} = \frac{c}{2}\,\frac{n}{d}$$

si ha

$$n = \frac{2\,d}{c}\,\nu_{n,0,0}.$$

la frequenza è di

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{6 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}}$$

$$\nu = 0.5 \times 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\nu = 5 \times 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$$

e dunque

$$n = \nu \frac{2\ d}{c}$$

$$n = 5\ x\ 10^{14}\ s^{-1}\ \frac{2\ x\ 10\ cm}{3\ x\ 10^{8}\ m/s}$$

$$n = 5\,x\,10^{14}\ s^{-1}\ \frac{2\ x\ 10^{-1}\ m}{3\ x\ 10^{8}\ m/s}$$

$$n = \frac{1}{3}\,x\,10^{6}$$

$$n \approx 3\,x\,10^{5}$$

Quindi siamo su ordini molto superiori.

- **separazione tra modi trasversi** (37’52”)

Per trovare la separazione tra i modi trasversi possiamo usare la formula di Hartur Sholow venuta fuori dallo studio dei modi di una cavità e dall’approssimazione parassiale (vedi) :

$$\nu_{n,\,l,\,m} \simeq \frac{c}{2}\ \frac{n}{d}\left(1 + \frac{1}{2}\ \frac{l^2 + m^2}{4\,a^2}\ \frac{d^2}{n^2}\right).$$

La separazione che cerchiamo è :

$$\Delta\nu_m = \nu_{n,\,l,\,m} - \nu_{n,\,l,\,m+1}$$

$$\Delta\nu_m = \left[\frac{c}{2}\frac{n}{d}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l^2 + (m+1)^2}{4\,a^2}\frac{d^2}{n^2}\right)\right] - \left[\frac{c}{2}\frac{n}{d}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l^2 + m^2}{4\,a^2}\frac{d^2}{n^2}\right)\right]$$

$$\Delta\nu_m = \frac{c}{2}\frac{n}{d} + \frac{c}{2}\frac{n}{d}\frac{1}{2}\frac{l^2 + (m+1)^2}{4\,a^2}\frac{d^2}{n^2} - \frac{c}{2}\frac{n}{d} - \frac{c}{2}\frac{n}{d}\frac{1}{2}\frac{l^2 + m^2}{4\,a^2}\frac{d^2}{n^2}$$

$$\Delta\nu_m = \frac{c}{4}\frac{d}{n}\left[\frac{l^2 + (m+1)^2}{4\,a^2} - \frac{l^2 + m^2}{4\,a^2}\right]$$

$$\Delta\nu_m = \frac{c}{4}\frac{d}{n}\frac{(m+1)^2 - m^2}{4\,a^2}$$

$$\Delta\nu_m = \frac{c\,d}{16\,n\,a^2}\left(m^2 + 2m + 1 - m^2\right)$$

$$\Delta\nu_m = \frac{c\,d}{8\,n\,a^2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{(separazione tra i modi trasversi)}$$

Vediamo che questa separazione, a differenza della separazione tra i modi longitudinali, non è una costante ma dipende da n, e da m.

A pag 368 c'è una figura illustrativa e dei conti per fare esempi quantitativi.

In generale è preferibile che i modi trasversi non oscillino.
Ci sono due motivi :
a) più modi oscillano, meno la radiazione laser è monocromatica
b) i modi longitudinali (TEM_{00}) sono modi gaussiani, con una distribuzione con tanti 'lobi', che portano problemi per focalizzare, etc.

Esistono dei metodi per 'eliminare' i modi trasversi.
Abbiamo visto che l'ipotesi di Hartur Sholow prevede che le dimensioni degli specchi siano piccole rispetto alla lunghezza della cavità.
In queste ipotesi le componenti k_x e k_y del vettore d'onda dei modi permessi possono essere solo piccoli; ma non è detto che siano nulli, dando luogo appunto ai modi trasversi.

Un modo per ridurli è dunque quello di inserire nella cavità dei diaframmi, con un foro centrale, che permette solo l'oscillazione dei modi longitudinali.

- **Numero di Fresnel** (43')

Introduciamo adesso un altro parametro che caratterizza una cavità : il numero di Fresnel.
Il numero di Fresnel di una cavità è definito come

$$N \equiv \frac{a^2}{d\,\lambda}.$$

Vediamo innanzitutto che si tratta di una quantità adimensionale.

Inoltre 'tiene dentro' tutti i parametri importanti della cavità : l'estensione degli specchi a, la loro distanza d, e la lunghezza d'onda λ della radiazione presente in

cavità.
Osserviamo inoltre che è possibile esprimere le separazioni tra i modi in termini del numero di Fresnel.

Per dare un *significato fisico* al numero di Fresnel lo possiamo vedere come il rapporto tra due angoli :

$$N = \frac{a}{\square} \Big/ \frac{d}{a} = \frac{\square}{\square}.$$

Di questi due angoli, $\square = \frac{d}{a}$ è l'angolo sotto il quale il centro di uno specchio vede l'altro specchio, e si può chiamare 'angolo di accettazione dello specchio'.
A rigore sarebbe la tangente dell'angolo, ma nell'ipotesi parassiale quest'angolo è piccolo, e si può confondere con la sua tangente.

Riguardo all'altro rapporto, ricordiamo che la diffrazione è il fenomeno per cui la radiazione 'devia' dalla propagazione in linea retta quando incontra ostacoli piccoli (paragonabili alla lunghezza d'onda) oppure 'discontinuità'.

riguardo all'altro angolo osserviamo che lo specchio è una 'sorgente secondaria estesa', che si può descrivere come composta da tante sorgenti puntiformi affiancate (principio di Huygens).
Queste sorgenti puntiformi fanno interferenza tra di loro, e si può dimostrare che l'angolo $\square = \frac{a}{\square}$ è l'angolo tra l'asse ottico e la direzione di propagazione del 'lobo di diffrazione' della radiazione 'prodotta dall'interferenza' (concetto del lobo di diffrazione è simile a quello visto per i fasci molecolari (vedi)). In altre parole è grosso modo l'angolo con cui, dal bordo dello specchio, la radiazione devia dalla propagazione in linea retta, a causa della diffrazione (angolo di diffrazione).

In definitiva possiamo dire che Il numero di Frenel è un rapporto tra quanto la radiazione si sparpaglia a causa della diffrazione, e quanto uno speccio è in grado di accogliere radiazione sparpagliata.
Dunque se il numero di Fresnel è piccolo, significa che la maggior parte della radaizione riflessa da uno specchio (che si sparpaglia per diffrazione) è raccolta dall'altro specchio :

N piccolo $\square$ poche perdite per diffrazione.

Questo concetto è legato alla *stabilità* di una cavità.

- **Stabilità** (48' 50")

Vogliamo studiare quantitativamente la stabilità.

Della radiazione che oscilla dentro una cavità subisce una serie di riflessioni sugli specchi.
D'altra parte la riflessione ha delle regole formalmente simili alla diffrazione attraverso una lente : si può definire una focale anche per uno specchio.
Dunque possiamo vedere il percorso delle riflessioni successive della radiazione nella cavità come il cammino ottico attraverso un certo sistema ottico (vedi figura a pag 370).
In particolare il sistema ottico in questione è un sistema <u>periodico</u>.

Ai fini dello studio della stabilità, la domanda che ci dobbiamo porre è : man mano che la radiazione si propaga in questo sistema ottico (periodico), la sua direzione di propagazione si mantiene vicina all'asse ottico, o se ne discosta sempre più?

Per rispondere a questa domanda si potrebbe usare la legge delle lenti sottili ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$) dell'ottica geometrica.

Ma questo è un approccio abbastanza laborioso : bisogna applicare questa legge per ogni lente, e poi l'immagine di una diventa l'oggetto della seguente, etc..

Un approccio più pratico a praticabile è l'ottica matriciale.

- Ottica matriciale

Consideriamo un generico sistema ottico, e un certo raggio che vi incide.
Il sistema ottico avrà un certo asse ottico.
Diciamo che il raggio parte da un certo punto sull'asse ottico e arriva sul sistema ottico in un certo punto.

Il raggio incidente può essere completamente individuato dall'angolo θ_1 che forma con l'asse ottico e dalla distanza r_1 tra il punto di ingresso nel sistema ottico e l'asse ottico.

Allo stesso modo si può individuare il raggio che emerge dal sistema ottico in base all'angolo θ_2 che forma con l'asse ottico e alla distanza r_2 dall'asse ottico del suo 'punto di emersione' (vedi figura a pag 371).

Nell'approssimazione parassiale gli angoli θ_1 e θ_2 sono piccoli, e dunque si può approssimare

$$\sin\theta \simeq \text{tg}\,\theta \simeq \theta$$

da cui

$$\theta \simeq r' = \frac{d\,r}{d\,z}.$$

Questa approssimazione (parassiale) si chiama anche approssimazione di Gauss.

Allora per individuare un raggio, in approssimazione parassiale, possiamo usare r e r'.

In approssimazione parassiale le relazioni tra i due parametri dei due raggi sono relazioni lineari :

$$\begin{cases} r_2 = A\, r_1 + B\, r_1' \\ r'_2 = C\, r_1 + D\, r_1' \end{cases}$$

e dunque l'effetto del sistema ottico si può descrivere tramite una matrice :

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \underline{S}\ \vec{r}_1 .$$

di tipologie di matrici ce ne sono solo 4 :

a) propagazione nel vuoto

b) passaggio da un mezzo ad un altro con diverso indice di rifrazione

c) lente sottile

d) specchio.

Vediamo nel dettaglio

- Propagazione nel vuoto per un tratto L (vedi figura pag 372):

$$\begin{cases} r_2 = r_1 + L\, \mathrm{tg}\, \theta_1 \\ r'_2 = r'_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_2 \simeq r_1 + L\, r'_1 \\ r'_2 = r'_1 \end{cases}$$

e quindi la matrice per questo 'sistema ottico' è :

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Propagazione attraverso una lastra di spessore L e di indice di rifrazione n (vedi figura pag 372) :

$$\begin{cases} r_2 = r_1 + L \, tg \dfrac{\theta_1}{n} \\ r'_2 = r'_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_2 \cong r_1 + L \dfrac{\theta_1}{n} \\ r'_2 = r'_1 \end{cases}$$

e quindi la matrice per questo ‘sistema ottico’ è :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Propagazione attraverso una lente sottile di focale f (vedi figura pag 373) :

$$\begin{cases} r_2 = r_1 \\ r'_2 = -\dfrac{r_2}{q} \end{cases}$$

[...]

$$\begin{cases} r_2 = r_1 \\ r'_2 = -\dfrac{r_1}{f} + r'_1 \end{cases}$$

e quindi la matrice per questo ‘sistema ottico’ è :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

- Propagazione attraverso uno specchi sferico di raggio di curvatura R (vedi figura pag 373) :

$$\begin{cases} r_2 = r_1 \\ r'_2 = -\dfrac{r_2}{q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_2 = r_1 \\ r'_2 = -\dfrac{r_1}{f} + r'_1 \end{cases}$$

dove per lo specchi sferico la focale è :

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

e quindi la matrice per questo ‘sistema ottico’ è :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che tutte queste matrici hanno determinante pari a 1.

A questo punto avendo a disposizione le matrici che rappresentano i sistemi ottici semplici, possiamo descrivere qualunque sistema ottico.
Infatti, nell’approssimazione parassiale, tutto si comporta linearmente, e dunque il comportamento di un sistema ottico costituito da due sistemi ottici semplici è descritto dal prodotto riga per colonna delle due matrici dei sistemi ottici semplici.

- stabilità

Avendo introditto il formalismo dell’ottica matriciale, con questo strumento vogliamo adesso studiare la stabilità.

La ‘matrice ABCD’ di un ‘round trip’ (percorso di andata e ritorno) di una cavità è il prodotto di quattro matrici ‘elementari’ : una paropagazione nel vuoto per un tratto L pari alla lunghezza della cavità, una riflessione su un primo specchio, un’altra propagazione libera, e un’altra riflessione.

Per comodità la riflessione su uno specchi la trattiamo come il passaggio attraverso ad una lente sottile di focale ‘opportuna’ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f_1} & \left(1-\frac{L}{f_1}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f_2} & \left(1-\frac{L}{f_2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(1-\frac{L}{f_2}\right) & L+L\left(1-\frac{L}{f_2}\right) \\ -\left[\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\left(1-\frac{L}{f_2}\right)\right] & -\left[\frac{L}{f_1}-\left(1-\frac{L}{f_1}\right)\left(1-\frac{L}{f_2}\right)\right] \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice che rappresenta il round trip :

$$\begin{pmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{L}{f_2}\right) & L+L\left(1-\frac{L}{f_2}\right) \\ -\left[\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\left(1-\frac{L}{f_2}\right)\right] & -\left[\frac{L}{f_1}-\left(1-\frac{L}{f_1}\right)\left(1-\frac{L}{f_2}\right)\right] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_s \\ r'_s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{s+1} \\ r'_{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_s \\ r'_s \end{pmatrix}$$

dove il pedice s esprime il round trip s-esimo.

Adesso facciamo un pò di passaggi algebrici per eliminare le derivate r'_s e r'_{s+1} :

$$\begin{cases} r_{s+1} = A\, r_s + B\, r'_s \\ r'_{s+1} = C\, r_s + D\, r'_s \end{cases}$$

dalla prima otteniamo

$$r'_s = \frac{1}{B}\left(r_{s+1} - A\, r_s\right)$$

da cui, passando a $s+2$:

$$r'_{s+1} = \frac{1}{B}\left(r_{s+2} - A\, r_{s+1}\right)$$

sostituendo questo nella seconda :

$$\frac{1}{B}\left(r_{s+2} - A\, r_{s+1}\right) = C\, r_s + D\, r'_s$$

e sostituendo l'espressione di r'_s trovata dalla prima :

$$\frac{1}{B}\left(r_{s+2} - A\, r_{s+1}\right) = C\, r_s + \frac{D}{B}\left(r_{s+1} - A\, r_s\right)$$

$$\frac{1}{B} r_{s+2} - \frac{A}{B} r_{s+1} - C\, r_s - \frac{D}{B}\left(r_{s+1} - A\, r_s\right) = 0$$

$$r_{s+2} - A\, r_{s+1} - C\,B\, r_s - D\left(r_{s+1} - A\, r_s\right) = 0$$

$$r_{s+2} - A\, r_{s+1} - C\,B\, r_s - D\, r_{s+1} + D\,A\, r_s = 0$$

$$r_{s+2} - r_{s+1}\left(A + D\right) + r_s\left(A\,D - B\,C\right) = 0.$$

Ora, sappiamo che il determinante delle matrici ABCD è uguale a 1, e dunque AD-BC=1 :

$$r_{s+2} - r_{s+1}\left(A + D\right) + r_s = 0$$

posto

$$b \equiv \frac{A + D}{2}$$

$$r_{s+2} - 2\, b\, r_{s+1} + r_s = 0$$

Adesso il prof dice una cosa che non ho proprio capito. Dice che «riconosciamo in questa espressione la 'soluzione agli elementi finiti' dell'equazione dell'oscillatore armonico».

Comunque in pratica si fa un parallelo tra l'equazione dell'oscillatore armonico :

$$r'' + A\, r = 0$$

che ha soluzione :

$$r(z) = r(0)\left(e^{i\sqrt{A}\, z} + e^{-i\sqrt{A}\, z}\right)$$

e si scrive che nel nostro caso

$$r_s = r_0\, e^{i s \theta}$$

e dunque sostituendo :

$$r_0\, e^{i s \square} e^{2 i \square} \;\square\; 2\, b\, r_0\, e^{i s \square} e^{i \square} + r_0\, e^{is \square} = 0$$

dividendo tutto per $r_0\, e^{i s \square}$ (quantità sicuramente positiva)

$$e^{2 i \square} \;\square\; 2\, b\, e^{i \square} \;\square\; 1 = 0$$

e posto $e^{i \square} = \square$

$$\square^2 \;\square\; 2\, b \square + 1 = 0$$

e risolvendo rispetto a $\square$:

$$\square = \frac{2\, b \pm \sqrt{4\, b^2 \square 4}}{2}$$

$$\square = b \pm \sqrt{b^2 \square 1}$$

$$\square = b \pm \sqrt{\square\left(1 \square b^2\right)}$$

$$\square = b \pm i\sqrt{1 \square b^2}$$

da cui, risostituendo $\square$:

$$e^{\pm i \square} = b \pm i\sqrt{1 \square b^2}$$

ma, usando le formule di Eulero $e^{\pm i \square} = \cos \square \pm i \sin \square$ possiamo scrivere :

$$\cos \square = b.$$

Ricordiamo adesso che quello che ci interessa è la stabilità della cavità, ovvero il fatto che al variare di s (numero di round trip) la funzione r_s sia una funzione oscillante, e non una funzione 'che esplode', in modo da rappresentare un raggio ottico che rimane nella cavità, e non ne esce.

Ma affinché la funzione $r_s = r_0\, e^{i s \square}$ sia una funzione oscillante deve succedere che $\square$ sia una quantità reale, e questo si può esprimere dicendo che

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

$$-1 \le b \le 1$$

e, andando a sostituire le posizioni

$$b \equiv \frac{A+D}{2}$$

e

$$\begin{bmatrix} \left(1-\frac{L}{f_2}\right) & L+L\left(1-\frac{L}{f_2}\right) \\ -\left[\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\left(1-\frac{L}{f_2}\right)\right] & -\left[\frac{L}{f_1}-\left(1-\frac{L}{f_1}\right)\left(1-\frac{L}{f_2}\right)\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

la condizione di stabilità diventa :

$$-1 \le \frac{1}{2}\left(1-\frac{L}{f_2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{f_1}-\left(1-\frac{L}{f_1}\right)\left(1-\frac{L}{f_2}\right)\right) \le 1$$

$$-1 \le \left(\frac{1}{2}-\frac{L}{2\,f_2}\right)-\frac{L}{2\,f_1}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{L}{f_2}-\frac{L}{f_1}+\frac{L^2}{f_1\,f_2}\right) \le 1$$

$$-1 \le \frac{1}{2}-\frac{L}{2\,f_2}-\frac{L}{2\,f_1}+\frac{1}{2}-\frac{L}{2\,f_2}-\frac{L}{2\,f_1}+\frac{L^2}{2\,f_1\,f_2} \le 1$$

$$-1 \le 1-\frac{L}{f_2}-\frac{L}{f_1}+\frac{L^2}{2\,f_1\,f_2} \le 1$$

$$-1 \le \left(1-\frac{L}{2\,f_1}\right)\left(1-\frac{L}{2\,f_2}\right) \le 1$$

Adesso poniamo

$$\begin{cases} g_1 = 1-\dfrac{L}{2\,f_1} \\ g_2 = 1-\dfrac{L}{2\,f_2} \end{cases}$$

e ricordando che uno specchio sferico di raggio R_1 ha focale

$$f_1 = \frac{R_1}{2} \Rightarrow R_1 = 2 f_1$$

possiamo scrivere

$$\begin{cases} g_1 = 1 - \dfrac{L}{R_1} \\ g_2 = 1 - \dfrac{L}{R_2} \end{cases}.$$

Dunque in definitiva la condizione di stabilità è

$$-1 \le g_1 g_2 \le 1$$

$$0 \le g_1 g_2 + 1 \le 2$$

$$0 \le \frac{g_1 g_2 + 1}{2} \le 1$$

che non so perché (?) diventa :

$$0 \le g_1 g_2 \le 1$$

Ma se la disegniamo su un piano (g_1, g_2), questa è la descrizione dell'area tra un'iperbole equilatera e gli assi coordinati (diagramma di stabilità, vedi figura a pag 377).

In questo modo, calcolando i parametri g_1 e g_2 della cavità e disegnandoli sul grafico possiamo dire subito se la cavità è instabile o stabile.

Facciamo delle prove usando i parametri di alcune cavità notevoli.

Intanto possiamo dire che le cavità simmetriche, per le quali $g_1 = g_2$, sono situate sulla bisettrice del primo e terzo quadrante del piano (g_1, g_2).

Per una cavità concentrica si ha

$$R_1 = R_2 = \frac{L}{2} \Rightarrow g_1 = g_2 = -1$$

e dunque siamo sul bordo inferiore dell'area di stabilità.

Per una cavità confocale

$$R_1 = R_2 = L \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2 = 0$$

e dunque staimo nell'origine, che è comunque un punto sulla frontiera dell'area di stabilità.

Per una cavità a specchi piani si ha :

$$R_1 = R_2 = \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2 = 1$$

e dunque stiamo sul bordo superiore dell'area di stabilità.

Essendo 'situate' sul bordo dell'area di stabilità si parla di 'cavità critiche', ovvero cavità che sono stabili, ma in una condizione 'limite' per la stabilità.

Per realizzare una cavità stabile non critica, scostandosi leggermente da questi punti di stabilità critica.

Una buona scelta è $R_1 = R_2 = 3\,L$, che porta all'interno dell'area di stabilità.

Osservazioni :
a) in realtà questa trattazione è basata sull'ottica geometrica, e dunque non è rigorosa.
Con la trattazione rigorosa che ci apprestiamo a fare scopriremo che ci sono delle differenze tra la cavità confocale e quella concentrica : il 'waist' (larghezza del fascio di radiazione nel punto più stretto, che per simmetria cadea al centro) è più stretto per una cavità concentrica (ma non puntiforme come vorrebbe l'ottica geometrica), e un pò più largo per una cavità confocale.

b) il metodo per valutare la stabilità che abbiamo appena visto è quello riportato da Yariv.
Esiste un altro approccio, che porta allo stesso risultato, riportato da O. Svelto, basato sui polinomi di Chebyshev.

Esiste poi un terzo approccio, basato sul concetto di autoraggio.
La cavità è vista come un operatore, e dunque per avere la stabilità bisogna che il raggio in uscita sia proporzionale a quello in entrata, cioè appunto un 'autoraggio.
Per questo terzo approccio ci vuole la trattazione analitica della radiazione elettromagnetica.

- Descrizione più rigorosa della radiazione in una cavità
(1h 18' 13")

La trattazione che faremo noi è comunque semplificata, perché una trattazione completa è pressoché irrisolvibile.
Per un promo momento ci limitiamo a studiare il campo sugli specchi; in seguito

studieremo anche il campo all'interno e all'esterno della cavità.

L'approccio è il seguente : noto il campo su uno speccio, vogliamo ricavare analiticamente il campo sull'altro specchio.

Quello che utilizzeremo è dunque una 'trattazione alla Huygens'.
Con questo approccio Huygens trovava i fronti d'onda.

Per il principio di Huygens la superfice dello specchio, come sorgente estesa, è formato da tante sorgenti puntiformi affiancate, di cui studiamo l'interferenza.
Supponendo che le sorgenti puntiformi emettono onde sferiche, si studia l'interferenza di queste onde studiando la differenza di fase con cui arrivano al 'rivelatore', a causa del diverso cammino ottico.
Ma mettendosi a grande distanza il vantaggio è che si possono approssimare i raggi come paralleli.

Questo è l'approccio dello studio della 'diffrazione alla Fraunhofer' : si studia l'interferenza tra due sorgenti, mettendosi a distanza dalle sorgenti grande rispetto alla distanza tra le due sorgenti (in questo modo si possono considerare i raggi come paralleli)

Viceversa studiando la 'diffrazione alla Fresnel' ci si mette vicino alle sorgenti.
In questo caso non si possono trattare i raggi come paralleli, ma bisogna tenrere conto del fatto che l'ampiezza delle onde (onde sferiche) che arrivano attenuandosi come $1/r$. Inoltre si tiene conto della diversa fase e^{ikr}, che è diversa a causa della diversa distanza percorsa.

> Metodo della spirale di Cornu : metodo geometrico per studiare la diffrazione (ma è un metodo tra l'algebra e la geometria, si sommano i campi sommandoli col metodo della poligonale, vedendoli come fasori...)

La trattazione più rigorosa è duenque quella di Fresnel, basata sull'integrale di Fresnel - Kircchoff.

:

$$U_2(P_2) = -\frac{i}{2\lambda}\int_{\Sigma_1} U_1(P_1)\frac{e^{ikr}}{r}\left(1+\cos\theta\right)\, dS_1$$

che è l'integrale che ci descrive la diffrazione.

Questo integrale esprime il campo in un punto P_2 in funzione del campo in un punto P_1.
L'integrale non fa altro che descrivere il principio di sovrapposizione.
Il termine esponenziale tiene conto dello sfasamento, a causa del diverso

percorso; il termine $1/r$ tiene conto dell'attenuazione; il fattore i tiene conto dello sfasamento dovuto al fatto che sono onde secondarie, sfasate di $\pi/2$. Infine il fattore col coseno si chiama 'fattore di obiquità'. Fresnel introdusse questo fattore 'ad-hoc', per spiegare la propagazione delle onde : le onde vanno 'in avanti', e non si propagano anche all'indietro.

In realtà qui già c'è un'approssimazione, perché descriviamo il campo con la quantità <u>scalare</u> U, mentre il campo è un vettore!

Il prof dice che la diffrazione è sempre descritta con metodi approssimati, tranne un caso di trattazione rigorosa risolto da Sommerfield.

Ricordiamo che questo studio lo facciamo per indagare sulla stabilità delle cavità ottiche.

La condizione che imponiamo è che nel punto P_2 ci sia un campo uguale a quello nel punto P_1 a meno di un fattore γ (numero complesso).
Questo discorso è anche quel discorso degli 'autoraggi' che abbiamo accennato prima.

In formule, quello che imponiamo è :

$$U_2(P_2) = \gamma\, U_1(P_1)$$

$$\gamma\, U_1(P_1) = \square \frac{i}{2\lambda} \int_{S_1} U_1(P_1) \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos\theta)\ dS_1 .$$

con $\gamma = |\gamma|\, e^{i\varphi}$ coefficiente complesso.

Questo è l'approccio al problema, almeno per la descrizione dei campi sugli specchi. Esister poi la possibilità di descrivere il campo all'interno della cavità, ma queto lo vedremo in seguito.

Una volta trovati gli 'autovalori' γ, la quantità $\delta = 1 - |\gamma|^2$ rappresenterà <u>le perdite</u>, ovvero di quanto si è attenuato il campo passando da uno specchio all'altro.

Infine, con questo approccio possiamo anche trovare le autofrequenze, imponendo che la fase φ sia un multiplo di 2π.

Osserviamo che per la cavità a specchi piani non c'è una soluzione analitica.
Fox e Li trovarono una soluzione 'numerica'. Invece per una cavità confocale si può ottenere una soluzione analitica.

- cavità a specchi piani e paralleli (Lezione 20)

Vediamo l'approccio analitico per studiare il campo sugli specchi di una cavità.
Preannunciamo che un approccio analitico si rivelerà non praticabile, e quindi ripiegheremo su un metodo numerico, dovuto a Fox e Li.

Partiamo da

$$U_2(P_2) = \gamma\, U_1(P_1)$$

$$\gamma\, U_1(P_1) = -\frac{i}{2\lambda} \int_{\Sigma_1} U_1(P_1)\, \frac{e^{ikr}}{r}\, (1+\cos\theta)\, dS_1$$

con $\gamma = |\gamma|\, e^{i\phi}$.

Ribadiamo che adesso stiamo considerando una cavità a specchi piani e paralleli.
Adesso introdurremo delle approssimazioni, che sono specifiche per questo tipo di cavità.
Vedremo altri tipi di cavità (solo un altro) per i quali saranno opportune altre approssimazioni).
Cominciamo coll'introdurre l'approssimazione parassiale, nell'ipotesi che la larghezza degli specchi sia molto minore della lunghezza della cavità : $L >> a$.

In tale approssimazione, essendo θ l'angolo che forma il vettore d'onda con l'asse ottico, si ha $\cos\theta \approx 1$.

Inoltre, sempre nell'approssimazione $L >> a$, l'espressione del vettore $\vec{r}$, che rappresenta la distanza tra i punti P_1 e P_2 :

$$\vec{r} = \left[L^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]^{1/2}$$

$$\vec{r} = \left[L + \frac{(x_1 - x_2)^2}{L} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{L}\right]^{1/2}$$

si può approssimare con uno sviluppo in serie :

$$\vec{r} = L + \frac{1}{2L}(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2L}(y_1 - y_2)^2 + \dots$$

Vediamo adesso come approssimare il termine $\frac{e^{ikr}}{r}$ (ricordiamo che questo tipo di approssimazione è specifico per la cavità a specchi piani e paralleli).

Nell'ipotesi $k\,\theta \ll 2\pi$ si possono fare delle approssimazioni (che io non riporto qui, vedi pag 384) per cui :

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cong \frac{e^{ikL} + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{2L}\left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right]}}{L}$$

$$= \frac{e^{ikL}}{L}\, e^{i\frac{\pi N}{a^2}\left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right]}$$

dove N è il numero di Fresnel della cavità.
Quindi

$$\sigma\, U(x_1,\ y_1) = -\frac{i}{2\lambda}\frac{e^{ikL}}{L}\iint_1 U\ e^{i\frac{\pi N}{a^2}\left[(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2\right]}\ dx_1\ dy_1$$

A questo punto si fa un cambio di variabili :

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\sqrt{N}}{a}\,x \\[2mm] \eta = \dfrac{\sqrt{N}}{a}\,y \end{cases}$$

e inoltre poniamo

$$\sigma^* = \sigma\, e^{-ikL}$$

da cui :

$$\sigma^*\, U(\xi_2,\ \eta_2) = -i\,\frac{e^{ikL}}{L}\iint_1 U(\xi_1,\ \eta_1)\ e^{i\pi\left[(\xi_1-\xi_2)^2 + (\eta_1-\eta_2)^2\right]}\ d\xi_1\ d\eta_1 .$$

A questo punto si può fare una separazione di variabili, cioè si pone :

$$\begin{cases} U(\xi,\eta) = U_\xi(\xi)\ U_\eta(\eta) \\ \sigma^* = \sigma^*_\xi\ \sigma^*_\eta \end{cases}.$$

A questo punto sostituiamo queste posizioni nell'equazione secoalre che abbiamo impostato, in cui compare l'integrale di Fresnel 'approssimato' che abbiamo ottenuto poco sopra, riuscendola a separare in due equazioni :

$$\begin{cases} \sigma_x^* \, U_x(\xi_2) = -i\,\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U_x \; e^{i\pi(\xi_1-\xi_2)^2} \; d\xi_1 \\ \sigma_y^* \, U_y(\eta_2) = -i\,\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U_y \; e^{i\pi(\eta_1-\eta_2)^2} \; d\eta_1 \end{cases}$$

nota : mettiamo un pedice diverso alla variabile della funzione del membro di sinistra, perché la veriabile su cui si integra (a destra) è diversa. Tuttavia sottolineiamo che la funzione U è la stessa, e infatti si tratta di un'equazione secolare.

Queste equazioni non sono risolvibili, e dunque dobbiamo passare ad un metodo ricorsivo, dovuto a Fox e Li.

Il metodo per sommi capi è il seguente :

a) si parte con una distribuzione di campo 'di prova' $U(\xi,\eta)$ per il primo specchio

b) si calcola numericamente il valore del campo sull'altro specchio

c) si ricalcola il campo nel punto da cui siamo partiti, e si reitera fin quando il processo converge.

A pag 386 (vedi figura) il prof mostra un grafico dell'andamento del valore numerico di una delle due componenti $U(\xi)$, per un particolare valore di ξ, all'aumentare del numero di iterazioni (le iterazioni rappresentantanomatematicamente le riflessioni da uno specchio all'altro).
Si vede che a partire dal valore iniziale messo un pò arbitrariamente, dopo molte iterazioni il valore del campo converge verso un valore, che quindi si 'prende per buono'.

bisogna capire che esistono molte *autofunzioni* della cavità.
Dunque, a seconda della funzione iniziale che usiamo per il processo iterativo, otteniamo diverse funzioni (costruite 'punto per punto' facendo le iterazioni).

Quello che si fa è dunque usare tante funzioni di prova, e usare un numero intero come etichetta per catalogarle.
Visto che abbiamo due funzioni, una per ognuna delle variabili che individuano il punto sul lo specchio, avremo due etichette che individuano le autofunzioni.

La prima funzione che usiamo come partenza del processo di iterazione è la funzione costante, che associamo al valore $m = 0$ del 'numero etichetta'. Poi per $m=1$ usiamo una funzione gradino, e così via.

C'è da dire che la funzione a cui converge il processo di iterazione dipende dalla geometria della cavità, e in particolare dipende dal numero di Fresnel.

Sui grafici che mostra (vedi figura a pag 387), il prof ci fa notare che quando il numero di Fresnel aumenta, diminuisce il valore del campo ai bordi dello specchio, come è coerente con la definizione di numero di Fresnel (perdite, cioè angolo di diffrazione).

Per ricostruire il campo sullo specchio, che è una funzione di due variabili, seguendo la posizione cha abbiamo fatto per il cambio di variabili, dobbiamo considerare il prodotto delle due funzioni :

$$U(\square, \square) = U_{\square}(\square)\ U_{\square}(\square)$$

ovvero

$$U(x, y) = U_m(x)\ U_l(y).$$

Ad esempio, poiché per la funzione uniforme, associata all'etichetta $m=0$ fornisce alla fine del processo iterativo una funzione a campana, l'autofunzione del campo

$$U_{00}(x, y) = U_0(x)\ U_0(y)$$

è una funzione tridimensionale a campana.

Allo stesso modo possiamo trovare la U_{01} e in generale le U_{ml}.

Queste funzioni sono chiamate TEM_{ml} (Transverse Electromagnetic Mode), anche se questo nome è più generale, ed è riferito alle 'autofunzioni' della cavità che descrivono il campo in tutta la cavità, e non solo sugli specchi.

Osserviamo anceh che quello che in genere si rileva è l'intensità della radiazione luminosa, che è proporzionale al modulo quadro del campo, e non il campo stesso.

Analogamente, sempre per via numerica e con un processo iterativo, si possono ricavare i valori di $\square$ (autovalori) in corrispondenza delle varie 'etichette', cioè delle varie 'funzioni iniziali', e quindi delle varie autofunzioni.

Il prof illustra un grafico (vedi figura a pag 389) ceh mostra l'andamento delle perdite della cavità ($\square = 1 \square |\square^*|^2 = f(N, m, l)$).

Ovviamente le perdite decrescono al crescere del numero di Fresnel.
Con questo approccio (studiando γ) si ritrovano le stesse frequenze dei modi propri della cavità (modi longitudinali, separati di c/2d (FSR) e modi trasversi) che abbiamo trovato in precedenza con le ipotesi di Sholow e Townes.

- **cavità confocale** (12')

Possiamo usare lo stesso approccio numerico di Fox e Li.

L'equazione agli autovalori è :

$$\gamma\, U_1(P_1) = -\frac{i}{2\lambda} \int_{\Sigma_1} U_1(P_1)\, \frac{e^{i k r}}{r}\, (1+\cos\theta)\ dS_1$$

Innanzitutto si fanno le stesse ipotesi di parassialità

$$L \gg a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\theta \approx 1 \\ r \approx L \quad \text{(sull'ampiezza)} \\ r \approx L - \frac{1}{L}\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right) \quad \text{(sulla fase)} \end{cases}$$

notiamo che queste approssimazioni sono diverse da quelle fatte per la cavità a specchi piani e paralleli, e infatti sono specifiche per questa cavità confocale.

Poi si fa lo stesso cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\sqrt{N}}{a}\, x \\ \eta = \dfrac{\sqrt{N}}{a}\, y \end{cases}$$

e inoltre si pone

$$\sigma^* = \gamma\, e^{-i k L}$$

da cui si ottiene :

$$\sigma^*\, U(\xi_2,\ \eta_2) = -i\, \frac{e^{i k L}}{L} \int U(\xi_1,\ \eta_1)\ e^{i \pi \left[(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2\right]}\ d\xi_1\ d\eta_1$$

A questo punto si può fare una separazione di variabili, cioè si pone :

$$\begin{cases} U(\xi,\eta) = U_\xi(\xi)\ U_\eta(\eta) \\ \sigma^* = \sigma^*_\xi\ \sigma^*_\eta \end{cases} .$$

e ‘implementando’ nell’equazione secolare, otteniamo la separazione in due equazioni, ognuna in una variabile :

$$\begin{cases} \sigma^*_\xi\ U_\xi(\xi_2) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \displaystyle\int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U_\xi\ e^{-i\,2\pi\,\xi_1\,\xi_2}\ d\xi_1 \\ \sigma^*_\eta\ U_\eta(\eta_2) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \displaystyle\int_{-\sqrt{N}}^{\sqrt{N}} U_\eta\ e^{-i\,2\pi\,\eta_1\,\eta_2}\ d\eta_1 \end{cases}$$

Le soluzioni di queste equazioni sono dette funzioni sferoidali radiali di Flammer

$$U_{m,l}(\xi,\eta) = U_{\xi,m}(\xi)\ U_{\eta,l}(\eta)$$

Nell’approssimazione del numero di Fresnel molto grande si può applicare una trasformata di Fourier alle due equazioni (che le riporta nelle variabili x e y, (vero?)), e le soluzioni diventano il prodotto di due polinomi di Hermite, pesati con un fattore esponenziale :

$$U_{x,m}(x) = H_m\left(x\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}\right) e^{-\frac{\pi}{L\lambda}x^2}$$

$$U_{y,l}(y) = H_l\left(y\sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}\right) e^{-\frac{\pi}{L\lambda}y^2}$$

dove ricordiamo che i primi polinomi di Hermite sono :

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{L\lambda}}\ x$$

...

Dunque in generale

$$U_{m\,l}(x, y) = H_m \; H_l \; e^{\square \frac{\square}{L\,\square}\left(x^2 + y^2\right)}$$

Ad esempio, il TEM_{00}, che è il modo 'solo longitudinale', con i modi transversi nulli, è dato dai soli fattori esponenziali :

$$U_{0\,0}(x, y) = e^{\square\left(\frac{\square}{L\,\square}\right)x^2} \; e^{\square\left(\frac{\square}{L\,\square}\right)y^2}$$

$$U_{0\,0}(x, y) = e^{\square\left(\frac{\square}{L\,\square}\right)\left(x^2 + y^2\right)}$$

e dunque lungo entrambe le direzioni x e y il campo ha un andamento gaussiano.

È conveniente definire la quantità

$$w_s = \sqrt{\frac{L\,\square}{\square}}$$

detta *spot size* (dimensione del fascio).

Con tale definizione si ha

$$U_{m\,l}(x, y) = H_m \; H_l \; e^{\square \frac{x^2 + y^2}{w_s^2}}$$

e dunque possiamo dire che lo spot size è la larghezza del fascio, cioè il diametro della circonferenza sui cui punti il campo vale $1/e$ volte il valore al centro.

$$w_s = \sqrt{\frac{L\,\square}{\square}}$$

$$w_s = \sqrt{\frac{L\,\square}{a^2\,\square}\;a^2}$$

$$w_s = \sqrt{\frac{a^2}{\square}\frac{1}{N}} \; .$$

Alle pagine 392 - 394 ci sono delle figure e le espressioni dei primi $TEM_{m\,l}$, che il prof analizza qualitativamente : i modi trasversi presentano delle 'macchioline'.

Il prof accenna al modo $TEM^*_{m\,l}$.
Si tratta di altri modi detti di Laguerre-Gauss : è come se per descrivere i modi scegliessimo un'altra 'base' (anche se non si tratta di un insieme completo, perché gli 'automodi' non sono autofunzioni di un operatore hermitiano).
Ci stanno pure i modi di Bessel.
In particolare, tra i modi di Laguerre - Gauss, il TEM^*_{01} ha la particolarità di avere un 'buco' al centro, cioè una forma a ciambella (dougnuts).
Con i modi 'dougnuts' si può fare una 'trappola' per atomi.

Per dare conto di questo effetto di intrappolamento degli atomi dobbiamo immaginare l'atomo come un dipolo.
Analogamente a quanto avviene nell'esperimento di Stern e Gerlac, se si mette questo dipolo in un campo non uniforme, questo è soggetto a delle forze.
Analogamente, in un fascio ottico si può realizzare un gradiente del campo.
Inoltre questo campo induce nell'atomo un dipolo (transizione elettronica).
Allora, a seconda della frequenza del campo ottico, se questa è leggermente spostata verso il rosso, rispetto alla frequenza propria del dipolino oscillante rappresentato dall'atomo, questo viene attratto o respinto dai minimi di intensità ((?) io il discorso non l'ho capito molto...).

In realtà nei modi 'dougnuts' non si crea una cavità vera e propria, ma si tratta di un tubicino, in quanto la forma a ciambella che abbiamo visto è solo la proiezione sullo specchio, mentre in tutto lo spazio della cavità il modo si sviluppa in lunghezza.

Comunque esistono delle tecniche per 'chiudere' il tubicino, con delle lenti a forma di cono, chiamate 'axicon' (fasci di Bessel - Gauss).

Divagazione in generale sull'intrappolamento di atomi e di cellule. Intrappolare le cellule nella zona buia è buono perché così non c'è un campo che le danneggia.
Infatti i fasci laser vengono focalizzati, con sistemi di lenti tipo 'obiettivo di microscopio', e dunque le intensità sono tali da poter danneggiare le cellule.

Altra proprietà (dei fasci dougnuts?) il trasporto di momento angolare da parte della luce.
I fotoni, se la luce è polarizzata □$_\pm$, hanno spin.
Si sono fatti esperimenti con scagliette di calcite messe nella 'trappola ottica' : si mette a girare con velocità angolari considerevoli, di 300 ÷ 400 Hz.

(27' 40")
Esperimento di Bethe con la 'bilancia torsionale' per rivelare il momento angolare della luce.
Una lamina leggera di calcite, appesa ad un filo di quarzo, viene investito con un fascio di luce polarizzata □$_+$. Il fascio riemerge con polarizzazione □$_-$, e si osserva

che la lamina comincia a ruotare.
Fu il primo esperimento che mise in evidenza il momento angolare trasportato dalla luce.

La luce trasporta momento angolare in due modi.
Il primo è dovuto allo spin dei fotoni, ed è dunque legato alla polarizzazione.

Ma esiste anche un secondo tipo di momento angolare trasportato dalla radiazione, che in analogia con l'atomo viene definito 'momento angolare orbitale'.
Questo secondo momento angolare è legato all'elicità dei fronti d'onda.
In altre parole in alcuni casi le superfici equifase non sono su un piano (non ho capito se sta parlando di fasci dougnuts).
D'altra parte ogni fotone trasporta una certa quantità di moto $\vec{p}$.
Allora, in questo caso di fronte d'onda 'a cavatappi', se si considera il momento angolare $\vec{r} \square \vec{p}$ di ogni fotone e ne si fa la somma, questa somma non è nulla.

Questo momento angolare orbitale può raggiungere valori elevati.

Sasso e Santamato hanno fatto di recente un esperimento con i fasci dougnuts, per 'far girare' dei piccoli oggetti.
Addirittura si riesce a far girare l'oggetto con un fascio che non ha nè momento angolare 'di spin' (polarizzazione) nè momento angolare orbitale.
In tal caso il fatto è che per come è fatto il processo di interazione il fascio uscente acquista momento angolare orbitale, e dunque per conservazione deve acquistare momento angolare uguale e opposto l'ogetto con cui ha interagito.

- Studio degli 'autovalori' associati agli automodi
(32' 25")

Dopo aver accennato all'esistenza dei modi di Laguerre-Gauss, e di Bessel il prof illistra il grafico (vedi figura a pag 395) dell'andamento delle perdite nella cavità confocale, in funzione del numero di Fresnel, per vari modi.
Le perdite decrescono al crescere del numero di Fresnel, ma l'andamento è meno critico rispetto alla cavità a specchi piani e paralleli.

Ricordiamo che le perdite sono descritte dal modulo dell'autovalore $\square$.

Ricordiamo che $\square$ è un numero complesso caratterizzato da un suo modulo e una sua fase :

$$\square = |\square| e^{\square\square}$$

ricordiamo inoltre che quando abbiamo fatto il cambio di variabili abbiamo anche posto

$$\square^* = \square\, e^{-i\,k\,L}.$$

gli autovalori che escono fuori dall'equazione secolare, per una cavità confocale e nel limite del numero di Fresnel infinito, sono :

$$\square^*_{m\,l} = e^{\square i \frac{\square}{2}(1+m+l)}.$$

D'altra parte

$$\square^* = \left|\square^*\right| e^{i\,\square^*}$$

e dunque possiamo ricavare una condizione sulla fase :

$$\left|\square^*\right| e^{i\,\square^*} = e^{\square i \frac{\square}{2}(1+m+l)}$$

$$\square^*_{m\,l} = \frac{\square}{2}(1+m+l)$$

Ma, ricordando che abbiamo posto $\square^* = \square\, e^{-i\,k\,L}$ si ha :

$$\square = \square^* + k\,L.$$

A questo punto osserviamo che il numero complesso $\square$ non cambia se la sua fase cambia di un numero intero di $\square$:

$$\square = n\,\square$$

$$\square\frac{\square}{2}(1+m+l) + k\,L = n\,\square$$

$$\frac{\square}{2}(1+m+l) + n\,\square = \frac{2\,\square}{\square}L$$

$$1+m+l+2\,n = \frac{4}{\square}L$$

$$1+m+l+2\,n = 4\,\frac{\square}{c}L$$

e quindi abbiamo le *autofrequenze* della cavità confocale :

$$\nu_{n,\,m,\,l} = \frac{c}{4\,L}\left[2\,n + 1 + m + l\right].$$

La separazione in frequenza tra i modi longitudinali (free spectral range) si ottiene ponendo $m = l = 0$:

$$\nu_{n,\,0,\,0} = \frac{c}{4\,L}\left(2\,n + 1\right)$$

$$\nu_{n,\,0,\,0} = \frac{c}{2\,L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

da cui

$$\Delta\nu_n = \nu_{n+1,\,0,\,0} - \nu_{n,\,0,\,0}$$

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2\,L}\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{c}{2\,L}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2\,L}\left[\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2\,L}$$

che quindi è lo stesso free spectral range della cavità a specchi piani e paralleli.

osserviamo che c'è una degenerazione per i modi con n fissato e con $m+l = \text{cost.}$

La separazione tra i modi trasversi è diversa e vale

$$\Delta\nu_m = \Delta\nu_l = \frac{c}{4\,L}.$$

Questo significa che i modi trasversi si mettono a metà dei modi longitudinali, e sono equispaziati! (inoltre sono tutti degeneri).

questo allora a volte fa dire impropriamente che il free spectral range di una cavità confocale è $\frac{c}{4\,L}$.

Questo è improprio perché il FSR è per definizione la separazione tra i modi longitudinali!
È possibile fare in modo che nella cavità non 'si eccitino' (cioè non ci siano) i modi trasversi.

Il prof illustra due utili formule, a pag 396, che forniscono le frequenze degli automodi (longitudinali e trasversi) per cavità più generali, cioè non confocali e non simmetriche (raggi degli specchi diversi) :

$$\nu = \frac{c}{4\,L}\left(2\,n + 1 + m + n\right)\left[1 + \frac{4}{\pi}\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{L - r}{L + r}\right)\right]$$

se $L \neq r$, e più in generale se anche $r_1 \neq r_2$:

$$\nu = \frac{c}{4\,L}\left[2\,n + \frac{2}{\pi}\left(1 + m + n\right)\cos^{-1}\sqrt{\left(1 - \frac{L}{r_1}\right)\left(1 - \frac{L}{r_2}\right)}\right].$$

e quindi si ha di nuovo lo spettro 'a pettine', con tutti i modi trasversi 'sparpagliati' attorno a quelli longitudinali.

(39')
- Cavità Fabry - Perot a specchi piani e paralleli come interferometri

Vedremo che la cavità ottica può essere usata per analizzare una radiazione elettromagnetica.
Si riescono a risolvere le diverse componenti di una radiazione non monocromatica.
C'è una forte similitudine con il reticolo di diffrazione.

La similitudine è che la risoluzione di un reticolo dipende dal numero di fenditure, mentre per la cavità a specchi piani usata come interferometro quello che conta è la riflettività degli specchi, e quindi il numero di round trip che riesce a fare la radiazione.
In entrambi i casi quello che conta è il numero di 'sorgenti secondarie' che interferiscono. Nel caso della cavità ogni riflessione 'è una sorgente secondaria'.
Questo interferometro può avere sensibilità elevatissime!

Se in una cavità c'è un mezzo attivo di lunghezza d rispetto alla lunghezza L della cavità, bisogna definire una *lunghezza efficace* della cavità L^* (lunghezza ottica) :

$$L^* = (L\text{-}d) + n\,d$$

$$= L + d\,(n - 1)$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo attivo.
Ciò posto, le autofrequenze della cavità sono

$$\nu_n \;=\; n\,\frac{c}{2\,L^*}$$

Ora però la questione è che in linea di principio l'indice di rifrazione è una funzione della frequenza, e dunque si ha una situazione non autoconsistente :

$$\nu_n \;=\; f(\nu).$$

Tuttavia la deviazione delle autofrequenze rispetto al caso di cavità vuota è trascurabile. Inoltre l'effettiva frequenza emessa dal laser si può sempre conoscere per misura diretta.

- Modi elettromagnetici all'interno della cavità confocale
(44' 20")

Fin qui abbiamo calcolato i campi sugli specchi.
È possibile calcolare i campi all'interno della cavità.
Il metodo di calcolo è basato sull'equazione di Helmoltz :

$$\nabla^2\,\vec{E} \;+\; k\,\vec{E} \;=\; 0$$

usando come condizioni al controno le espressioni del campo sugli specchi che abbiamo appena trovato.
L'espressione che si ottiene è la seguente :

$$U(x, y, z) \;=\; \frac{w_0}{w(z)}\,H_m\!\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w(z)}\right)\,H_l\!\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{w(z)}\right)\,e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}\;e^{-i\left[k\,z\,-\,(1+m+l)\,\Phi(z)\right]}\;e^{-i\left(k\,\frac{x^2+y^2}{2\,R(z)}\right)}$$

(forma analitica del generico modo in una cavità confocale)

dove si sono utilizzate le seguenti posizioni :

$$w(z) \;=\; w_0\,\sqrt{1+\left(\frac{2\,z}{L}\right)^2}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{L\,\lambda}{2\,\pi}}$$

$$= \frac{w_s}{\sqrt{2}}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{L}{2\,z}\right)^2\right]$$

$$\Phi(z) = tg^{-1}\left(\frac{2\,z}{L}\right).$$

Vediamo che si tratta di due polinomi di Hermite 'modulati' da un fattore gaussiano, poi ci sono due 'fasi'. La prima fase $e^{-i\left[k\,z\,-\,(1+m+l)\,\Phi(z)\right]}$ è definita 'fase longitudinale', mentre la seconda è definita 'fase trasversa'.

'Interpretazione fisica' :

L'asse z è l'asse ottico della cavità, e mettiamo $z=0$ al centro della cavità.

Vediamo che per $z=0$ si ha $w(z) = w_0$.
Osservando il 'fattore gaussiano' capiamo che w_0 è lo 'spot size', ossia il diametro del fascio.
Questo diametro è definito più rigorosamente come segue.
Consideriamo un piano perpendicolare all'asse della cavità (piano xy).
Il diamoetro del fascio è allora il diametro della circonferenza che è il luogo dei punti in cui l'intensità della radiazione è $1/e$ volte l'intensità che si ha al centro, cioè sull'asse ottico.

Dunque w_0 è il diametro del fascio al centro della cavità. Vedremo che questo è il valore minimo del diametro del fascio, e viene chiamato 'beam waist'.

Per una cavità confocale questo 'waist' ha dunque un valore che dipende dalla lunghezza della cavità e dalla lunghezza d'onda della radiazione : $w_0 = \sqrt{\frac{L\,\lambda}{2\,\pi}}$.

Questo valore fissa a sua volta l'andamento di $w(z)$, che è l'andamento del diametro del fscio spostandosi lungo l'asse della cavità.

Quando ci mettiamo sugli specchi si ha $z = \pm L/2$, e dunque :

$$w\left(\pm\frac{L}{2}\right) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{2\,L}{2\,L}\right)^2}$$

$$w\left(\pm\frac{L}{2}\right) = w_0\sqrt{2}$$

ma abbiamo posto che

$$w_0 = \frac{w_s}{\sqrt{2}},$$

e quindi

$$w\left(\pm\frac{L}{2}\right) = w_0\sqrt{2} = \frac{w_s}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = w_s$$

cioè w_s è lo spot size sullo specchio.

$R(z)$ che compare nella fase trasversa vedremo che ha il significato di *raggio di curvatura del fronte d'onda*.

Ripercorriamo ancora più in dettaglio i vari termini del campo, sopratutto nel caso $m = l = 0$ (TEM_{00}).

+ ampiezza

Poiché i due polinomi di Hermite con 'etichetta' $m = l = 0$ sono una costante si ha

$$\left|U_{0\,0}(x,y,z)\right| \propto \frac{w_0}{w(z)}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}.$$

La larghezza del fascio $w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{2\,z}{L}\right)^2}$ per posizioni 'notevoli' è

$w(0) = w_0$ al centro della cavità

$$w\left(\frac{L}{4}\right) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{2\,L}{4\,L}\right)^2}$$

$$= w_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

$$= w_0 \sqrt{\frac{5}{4}}$$ tra il centro e uno specchio

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\,L}{2\,L}\right)^2}$$

$$= w_0 \sqrt{2}$$ su uno specchio

Quindi vediamo che il fascio ha larghezza minima al centro della cavità e va allargandosi spostandosi verso gli specchi, dove vale $\sqrt{2}$ volte il valore al centro. Il profilo trasverso è comunque sempre gaussiano.

Ricordiamo che il valore della raghezza del fascio al centro della cavità è w_0 ed è chiamata "beam waist".

- definizione di parametro confocale

Il parametro confocale si definisce per qualsiasi sitema ottico, e ha a che fare con la profondità di campo.

Per definizione il parametro confocale è la distanza z_c dal centro della cavità, lungo l'asse ottico, alla quale lo spot size $w(z)$ vale $\sqrt{2}$ volte il 'beam waist' (cioè lo spot size al centro dell'asse ottico, che è il punto in cui lo spot size è minimo).

Per una cavità confocale si ha che il parametro confocale coincide con la lunghezza della cavità.
(?) ma io non mi trovo!!! abbiamo appena visto che la larghezza del fascio è $\sqrt{2}$ volte il waist sugli specchi, e cioè a distanza $L/2$ dal centro!

Osserviamo che il fattore $\frac{w_0}{w(z)}$ messo davanti all'espressione del campo ha lo scopo di normalizzare il campo, in modo da assicurare la conservazione dell'energia.
In altre parole l'integrale del modulo quadro del campo :

$$\iint |U|^2 \, dx\, dy$$

che è proporzionale all'integrale dell'intensità, deve essere una quantità indipendente da z.

- fase longitudinale

Fin qui abbiamo sempre taciuto la dipendenza temporale.
Dall'equazione di Helmoltz e dall'equazione di Fresnel - Kircchoff viene fuori che la dipendenza temporale del campo è del tipo :

$$e^{\pm i \omega t} = e^{\pm i 2 \pi \nu t}.$$

Dunque sono possibili soluzioni che descrivono un'onda che si propaga sia in un senso che nell'altro.

In pratica questo significa che nella cavità si instaura un'onda stazionaria.

Questo è un problema di quasi tutte le cavità laser.
Questo non è buono, perché l'onda stazionaria determina dei nodi e dei ventri; nei punti in cui c'è un nodo il campo è nullo, e quindi quelle zone del mezzo attivo non vengono utilizzate ai fini del laser.

Nei laser più moderni si fa in modo di sopprimere una delle due onde, e quindi non si ha l'onda stazionaria.

Per fare questo non bastano due specchi, ma ne servono almeno tre, o quattro (tipo le cavità monolitiche).
inoltre si utilizza un dispositivo chiamato *diodo ottico*, che fa passare la luce solo in un verso.

Comunque l'onda che poi esce (dallo specchio di riflettività non infinita) è un onda viaggiante.

Il termine di fase longitudinale contiene l'informazione sulla velocità di fase (vedi).

In particolare la fase longitudinale è :

$$\Phi(z) = k z - (1 + m + l)\, \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2 z}{L}\right).$$

Da questa fase longitudinale si può ricavare la velocità di fase dei fotoni laser.

- fase trasversa

Il termine di fase trasversa (vedi) ci dà invece informazioni sui fronti d'onda (superfici equifase).
Le superfici equifase si trovano nel seguente modo.

Fissiamo un certo valore arbitrario di z, che chiamiamo z_0.
Per avere una quantità adimensionale bisogna moltiplicare per il numero d'onda : $k z_0$.
Ma a parte le considerazioni dimensionali, se si mette $x=y=0$ si vede che questa è la fase trasversa sull'asse ottico, a meno del termine longitudinale (qui c'è qualcosa che non torna del tutto...).

Imponiamo dunque che la fase per lo z enerico sia uguale a questa in z_0 :

$$\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2\,R(z)} + k\,z - \left(1+m+l\right)\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2\,z}{L}\right) = k\,z_0$$

trascurando la fase longitudinale

$$\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2\,R(z)} + k\,z = k\,z_0$$

$$\frac{x^2+y^2}{2\,R(z)} + z = z_0$$

$$\frac{x^2+y^2}{2\,R(z)} = z_0 - z.$$

Questa è l'equazione di un <u>paraboloide di rivoluzione</u>.
Nell'approssimazione parassiale questo paraboloide diventa una sfera, con raggio di curvatura pari a $R(z)$.

Il fatto che i fronti d'onda siano (quasi) sferici ci fa molto comodo, perché vuol dire che quando la radiazione arriva sullo specchio (che è sferico) il fronte d'onda coincide con lo specchio, e quindi l eporzioni di radiazione che arrivano sullo specchio stanno alla stessa fase.

Un'onda sferica vera e propria ha espressione :

$$U(P) \propto \frac{e^{-i\,k\,R}}{R} = \frac{e^{-i\,k\,\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{R}$$

ceh, approssimando un pò diventa :

$$\propto \; \frac{e^{-i k z}}{R} \; e^{-i k \frac{r^2}{2 R}}$$

Invece l’onda gaussiana è :

$$U \; \mu \; e^{-i k z} \; e^{-i \frac{k \left(x^2+y^2\right)}{2 R(z)}} \; e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{w^2(z)}}$$

Dunque possiamo dire che è un’onda sferica ‘modulata’ da un termine gaussiano (il terzo esponenziale).

- parametri alternativi per descrivere il fascio gaussiano
(1h 5’)

Abbiamo visto come sia il raggio di curvatura $R(z)$ che la larghezza del fascio $w(z)$ sono scritti in funzione del beam waist w_0 :

$$w_0 = \sqrt{\frac{L \lambda}{2 \pi}}$$

$$\begin{cases} R(z) = z \left[1 + \left(\dfrac{L}{2 z} \right)^2 \right] \\ w(z) = w_0 \left[1 + \left(\dfrac{2 z}{L} \right)^2 \right]^{1/2} \end{cases}$$

con un pò di passaggi

$$\begin{cases} R(z) = z \left[1 + \left(\dfrac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \\ w(z) = w_0 \left[1 + \left(\dfrac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^{-2} \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(z) = z\left[1 + \left(\dfrac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right] \\[2ex] w(z) = w_0\left[1 + \left(\dfrac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right]^{1/2} \end{cases}$$

Dunque noto w_0 possiamo conoscere il raggio di curvatura $R(z)$ che la larghezza del fascio $w(z)$ in ogni punto z dell'asse ottico.
In particolare osserviamo che il raggio di curvatura al centro della cavità è ∞, coè il fronte d'onda è piano.

È possibile definire un'unica quantità complessa q che contiene sia l'informazione sul raggio di curvatura che l'informazione sulla larghezza del fascio, e che chiamiamo *raggio complesso* :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - i\,\frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \qquad \text{(raggio complesso).}$$

Con queste posizioni possiamo riscrivere l'espressione del campo nella cavità, cioè l'espressione del fascio gaussiano :

$$U \propto e^{-ikz}\; e^{-i\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2R(z)}}\; e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{w^2(z)}}$$

$$U \propto e^{-i\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2R(z)}}\; e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{w^2(z)}}$$

$$U \propto e^{-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{w^2(z)} - i\,\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2R(z)}}$$

$$U \propto e^{-i\left(x^2+y^2\right)\left[\frac{1}{i\,w^2(z)} + \frac{k}{2R(z)}\right]}$$

$$U \propto e^{-i\,\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2}\left[\frac{1}{R(z)} - i\,\frac{2}{k\,w^2(z)}\right]}$$

$$U \propto e^{-i\,\frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2}\left[\frac{1}{R(z)} - i\,\frac{2\lambda}{2\pi\,w^2(z)}\right]}$$

$$U \propto e^{-i \frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2}\left[\frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w^2(z)}\right]}$$

$$U \propto e^{-i \frac{k\left(x^2+y^2\right)}{2}\frac{1}{q(z)}}$$

Infine possiamo definire la *lunghezza di Rayleigh*

$$z_R \equiv \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

e quindi riesprimere

$$\begin{cases} R(z) = z\left[1 + \left(\dfrac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right] \\ w(z) = w_0\left[1 + \left(\dfrac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right]^{1/2} \end{cases}$$

(attenzione, controllare il quadrato su w0 al numeratore di R(z))

$$\begin{cases} R(z) = \dfrac{1}{z}\left[z^2 + z_R^2\right] \\ w(z) = w_0\left[1 + \left(\dfrac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right]^{1/2} \end{cases}$$

ed inoltre, posto

$$\frac{1}{q_0} = -i\frac{\lambda}{\pi w_0^2}$$

possiamo riscrivere anche il raggio complesso

$$q(z) = q_0 + z.$$

Ma

$$\frac{1}{q_0} = -\frac{i}{z_R}$$

$$q_0 = i\, z_R$$

e quindi in definitiva possiamo scrivere

$$q(z) = z + i\, z_R .$$

Osserviamo che il raggio complesso contiene tutta l'informazione per caratterizzare un fascio gaussiano : raggio di curvatura e larghezza del fascio.

- propagazione del fascio laser fuori della cavità

Tutte le quantità che abbiamo introdotto ci consentono adesso di descrivere la propagazione del fascio (gaussiano) che esce dalla cavità laser.

Per inciso diciamo che il fascio laser ha una divergenza. La divergenza di un fascio laser è dell'ordine del milliradiante : un fascio con spot size di 2 mm, dopo 1 Km di propagazione diventa di 1 metro.

Avendo definito il raggio complesso, si ha che anche per i fasci gaussiani possiamo utilizzare il <u>formalismo delle matrici</u>.

In particolare si possono definire le matrici ABCD associate a propagazione libera, lente sottile, interfaccia, etc., che trasformano il raggio complesso del fascio in ingresso nel raggio complesso del fascio in uscita.
Risordiamo che il raggio complesso contiene tutta l'informazione per caratterizzare un fascio gaussiano.

Esempio : propagazione libera di un tratto l :

La matrice ABCD che rappresenta la propagazione libera è

$$\begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e infatti

[...]

Esempio : lente sottile messa nel waist (larghezza minima).
(1h 19')

Vogliamo sapere dove si forma il nuovo waist, e quanto è il suo diametro.

Il raggio complesso del fascio incidente e di quello in uscita siano rispettivamente

$$q_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ R_1 \end{pmatrix} \quad ; \quad q_2 = \begin{pmatrix} w_2 \\ R_2 \end{pmatrix}.$$

Se la lente è sottile per definizione deve essere $w_1 = w_2$.

La matrice ABCD di una lente sottile è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

In generale

$$q_2 = \frac{A\,q_1 + B}{C\,q_1 + D}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C\,q_1 + D}{A\,q_1 + B}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D\,\frac{1}{q_1}}{A + B\,\frac{1}{q_1}}.$$

Nota : queste formule non ho proprio capito come si ricavano, applicando il formalismo matriciale... credo che ci siano delle cose taciute. Tra l'altro non mi è chiaro se i conti si fanno solo sulla parte reale, o su tutto il raggio complesso.
Comunque, visto ceh devo studiare il corso di ottica, tralascio questo fatto, rimandandolo a quella sede.

Dunque, nel caso della lente sottile :

$$\frac{1}{q_2} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}$$

da cui, esplicitando :

$$\frac{1}{R_2} - i\,\frac{\lambda}{\pi w_2^2} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{R_1} - i\,\frac{\lambda}{\pi w_1^2}$$

ma $w_1 = w_2$, e dunque semplificando

$$\frac{1}{R_2} - i\frac{\lambda}{\pi w_1^2} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{R_1} - i\frac{\lambda}{\pi w_1^2}$$

$$\frac{1}{R_2} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{R_1}.$$

Questo significa che l'effetto della lente sottile è solo quello di modificare il raggio di curvatura del fascio gaussiano.

Questo è vero in generale, cioè avendo messo la lente in un punto qualunque del fascio gaussiano.

Esempio 3
(1h 20')

Adesso studiamo il caso più particolare in cui mettiamo la lente sottile nel waist del fascio gaussiano all'interno della cavità laser.
Ricordiamo che nel waist non solo il fascio ha la minima larghezza, ma succede anche che il raggio di curvatura è infinito, cioè il fronte d'onda è piano.

> Osserviamo che se avessimo usato l'ottica geometrica avremmo concluso che il fascio uscente ha la larghezza minima nel fuoco della lente; qui vedremo che arriviamo a una conclusione un pò diversa.

Per descrivere questa situazione dobbiamo usare due patrici : un aper la lente sottile, e una per la propagazione libera :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{z}{f} & z \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha (ricordo che io non ho capito come si applica la trasformazione al raggio complesso...)

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D\frac{1}{q_1}}{A + B\frac{1}{q_1}}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}}{1 - \frac{z}{f} + z\,\frac{1}{q_1}}$$

esplicitiamo adesso il raggio di curvatura complesso

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{R_1} - i\,\frac{\lambda}{\pi w_1^2}$$

nel caso specifico si ha :

$$\begin{cases} R_1 = \infty \\ w_1 = w_{0\,1} \end{cases}$$

e dunque

$$\frac{1}{q_1} = - i\,\frac{\lambda}{\pi w_{0\,1}^2}$$

e, ricordando la definizione di lunghezza di Rayleigh $z_R \equiv \dfrac{\pi w_0^2}{\lambda}$

$$\frac{1}{q_1} = - \frac{i}{z_{R\,1}}.$$

Allora per il fascio uscente :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}}{1 - \frac{z}{f} + z\,\frac{1}{q_1}}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} - \frac{i}{z_{R\,1}}}{1 - \frac{z}{f} + i\,\frac{z}{z_{R\,1}}}$$

e, razionalizzando

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\left[\left(-\frac{1}{f} - i\,\frac{1}{z_{R1}}\right)\right]\left[1 - \frac{z}{f} - i\,\frac{z}{z_{R1}}\right]}{\left(1-\frac{z}{f}\right)^2 + \left[\frac{z}{z_{R1}}\right]^2}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{z}{f^2} - i\,\frac{1}{f\,z_{R1}} - i\,\frac{1}{z_{R1}} + i\,\frac{z}{f\,z_{R1}} - \frac{z}{z_{R1}^2}}{\left(1-\frac{z}{f}\right)^2 + \left[\frac{z}{z_{R1}}\right]^2}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{z}{f^2} - \frac{z}{z_{R1}^2}}{\left(1-\frac{z}{f}\right)^2 + \left[\frac{z}{z_{R1}}\right]^2} + i\,\frac{\frac{z}{f\,z_{R1}} - \frac{1}{f\,z_{R1}} - \frac{1}{z_{R1}}}{\left(1-\frac{z}{f}\right)^2 + \left[\frac{z}{z_{R1}}\right]^2}.$$

Adesso, ricordiamo che lo scopo era trovare il waist del fascio in uscita. Scriviamo esplicitamente il raggio complesso del fascio in uscita :

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - i\,\frac{\lambda}{\pi w_2^2}.$$

Nel waist per definizione $\begin{cases} R_2 = \infty \\ w_2 = w_{02} \end{cases}$, e dunque $1/q_2$ nel waist è una quantità immaginaria pura.

Quindi per trovare il waist imponiamo che si annulli la parte reale di $1/q_2$:

$$\frac{-\frac{1}{f} + \frac{z}{f^2} - \frac{z}{z_{R1}^2}}{\left(1-\frac{z}{f}\right)^2 + \left[\frac{z}{z_{R1}}\right]^2} = 0$$

[...]

$$-\frac{1}{f}\left(1-\frac{z}{f}\right) + \frac{z}{z_{R1}^2} = 0$$

$$-\frac{1}{f} + \frac{z}{f^2} + \frac{z}{z_{R1}^2} = 0$$

$$z\left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{z_{R1}^2}\right) = \frac{1}{f}$$

$$z\,\frac{z_{R1}^2 + f^2}{f^2 z_{R1}^2} = \frac{1}{f}$$

$$z = \frac{1}{f}\,\frac{f^2 z_{R1}^2}{z_{R1}^2 + f^2}$$

$$z = \frac{f z_{R1}^2}{z_{R1}^2 + f^2}$$

$$z_{bw} = \frac{f}{1 + \left(\frac{f}{z_{R1}}\right)^2}$$

questa dunque è la posizione del waist del fascio gaussiano in uscita.

Osserviamo che il denominatore è positivo, e dunque la posizione del waist è spostata verso la lente rispetto al fuoco della lente!

Possiamo poi trovare la larghezza di questo waist del fascio in uscita, uguagliando le parti immaginarie calcolate in z_{bw} di

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - i\,\frac{\lambda}{\pi w_2^2}$$

e

$$\frac{1}{q_2} = \frac{-\frac{1}{f} + \frac{z}{f^2} - \frac{z}{z_{R1}^2}}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}}\right)^2} + i\,\frac{\frac{z}{f\,z_{R1}} - \frac{1}{f\,z_{R1}} - \frac{1}{z_{R1}}}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_{R1}}\right)^2}$$

otteniamo :

$$\square\ i \frac{\square}{\square w_{0\,2}^{2}} = +\ i \frac{\dfrac{z_{bw}}{f\, z_{R\,1}} \square \dfrac{1}{f\, z_{R\,1}} \square \dfrac{1}{z_{R\,1}}}{\left(1 \square \dfrac{z_{bw}}{f}\right)^{2} + \left(\dfrac{z_{bw}}{z_{R\,1}}\right)^{2}}$$

$$\frac{\square}{\square w_{0\,2}^{2}} = +\ i \frac{\dfrac{z_{bw}}{f\, z_{R\,1}} \square \dfrac{1}{f\, z_{R\,1}} \square \dfrac{1}{z_{R\,1}}}{\left(1 \square \dfrac{z_{bw}}{f}\right)^{2} + \left(\dfrac{z_{bw}}{z_{R\,1}}\right)^{2}}$$

[...]

$$w_{0\,2} \ \square\ \frac{\square f}{\square w_{0\,1}}.$$

Per avere un'idea quantitativa, se ipotizziamo di mandare un fascio gaussiano rosso He-Ne, con una focale di 10 cm, e se il waist in ingresso è di 1 mm, il waist del fascio in uscita è di 200 μm.

Notiamo che il waist del fascio in uscita è inversamente proporzionale al waist del fascio in ingresso.

Questo risultato si può interpretare ai fini del 'potere risolutivo di uno strumento ottico' (pensiamo a un telescopio).

Per riuscire a risolvere sorgenti puntiformi vicine (cioè per avere dei waist del fascio uscente piccolo) bisogna lavorare a lunghezze d'onda piccole, e bisogna avere il waist del fascio in ingresso largo.