Momenti angolari e rotazioni

[appunti presi principalmente da:
"E.Onofri C.Destri - Istituzioni di Fisica Teorica - Carocci (1996)"]

Definizione di rotazione come trasformazione di $\mathbb{R}^3$

Una rotazione si può definire come una trasformazione R dello spazio fisico tridimensionale in se, con le seguenti proprietà :

a) lascia invariate le distanze
b) non sposta l'origine
c) non cambia l'orientazione degli assi.

Per quanto studiato a proposito delle trasformazioni su spazi finito-dimensionali (reali), una trasformazione che conserva le distanze è ortogonale, ed è rappresentata da una matrice ortogonale (trasposta = inversa):

$$RR^T = \mathbb{I}.$$

Inoltre, essendo preservata l'orientazione degli assi, il determinante è 1.

Quindi concludiamo che il gruppo delle rotazioni è isomorfo al gruppo speciale delle matrici ortogonali di ordine 3, $SO(3)$.

(se ho capito bene, Onofri 'dimostra' che la matrice rappresentativa è ortogonale. Non ho capito con quali argomenti, e vorrei anche essere sicuro che realmente quello che fa è una dimostrazione)

Dalla proprietà a) discende che

$$dx'_\mu dx'_\mu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} dx_\lambda dx_\nu = dx_\mu dx_\mu$$

ovvero che la matrice rappresentativa di una rotazione è

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}.$$

(io non ho capito da dove viene 'sta roba : in che senso «dalla proprietà a) discende che..». Che sta scrivendo? è teoria della misura? sta usando lo spazio duale? bah?)

Rotazioni ed operatori unitari

Se si effettua una trasformazione sullo spazio tridimensinale $\mathbb{R}^3$, questa induce una 'trasformazione' anche sullo spazio di Hilbert delle funzioni (a quadrato sommabile) definite su $\mathbb{R}^3$ (funzioni d'onda).

Per definire gli operatori associati alle rotazioni possiamo utilizzare la definizione di 'grandezza scalare'. Infatti per definizione una grandezza scalare è invariante per trasformazioni sui vettori ((?)rigorizzare).
Ora, in meccanica quantistica possiamo considerare 'scalare' il modulo quadro della funzione d'onda, che come sappiamo rappresenta la 'probabilità di presenza'.
Un punto materiale non ha nessuna struttura interna, e dunque un insieme completo di osservabili compatibili per esso è costtuito dalle tre componenti della posiszione.

Allora diciamo che la trasformazione

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$$

'induce' l'operatore U_R

$$\psi' = U_R\psi$$

definito in modo che

$$|U_R\psi(x')|^2 = |\psi(x)|^2$$

cioè in modo che il modulo quadro della funzione d'onda si comporti come uno scalare.

Questo però non definisce completamente l'operatore, perché in questo modo la funzione d'onda è definita a meno di una fase.
Con un pò di lavoro (teorema di Wigner) si dimostra che la fase può essere scelta uguale per tutte le funzioni d'onda e per qualunque rotazione.

Dunque dalla definizione di U_R discende che per ogni funzione d'onda ψ si ha

$$\left(U_R\psi\right)(Rx) = \psi(x)$$

o, che è lo stesso

$$\left(U_R\psi\right)(x) = \psi\left(R^{-1}x\right) \quad .$$

(la frase che segue l'ho copiata pari pari dal libro)
Il fatto che le funzioni d'onda si trasformano secondo una legge universale, uguale per tutte, garantisce che l'operatore U_R sia un operatore lineare sullo spazio di Hilbert, che inoltre conserva il prodotto scalare, ossia :

$$\langle\psi|\phi\rangle = \left\langle U_R\psi\middle| U_R\phi\right\rangle \quad .$$

Dunque U_R è un operatore unitario.

Definizione alternativa di U_R

Potremmo adottare come definizione di U_R direttamente la relazione tra le funzioni d'onda, anzicché quella sui moduli quadri, evitando apparentemente i problemi con la fase.
In altre parole diremmo che anche la funzione d'onda, e non solo il suo modulo quadro, si comporta come uno scalare rispetto alle rotazioni.

Allora potremmo definire l'operatore U_R associato alla rotazione R specificando la sua azione sui 'vettori di base' dello spazio di Hilbert (rappresentazione delle posizioni) :

$$U_R|x\rangle = |Rx\rangle$$

(altra frase copiata quasi integralmente)
Un fattore di fase davanti al membro di sinistra, in linea di principio sempre possibile, non potrebbe comunque dipendere da x, in base alla richiesta che l'operatore **p** si trasformi come un vettore. Ptrebbe dunque dipendere solo da R ed essere perciò eliminabile da una ridefinizione di U_R.
Otteniamo così :

$$\left(U_R\psi\right)(x) \equiv \langle x|U_R|\psi\rangle = \langle R^{-1}x|\psi\rangle = \psi\left(R^{-1}x\right)$$

che è la stessa definizione ottenuta con l'altra strada.

In questo caso però, questa definizione non garantisce che U_R sia un operatore lineare sullo spazio di Hilbert, e dobbiamo quindi richiederlo esplicitamente, ponendo :

$$U_R|\psi\rangle \equiv \int \psi(x)\, U_R|\mathbf{x}\rangle\, d^3\mathbf{x} \quad .$$

Dunque anche questa strada ha il problema del fattore di fase arbitrario. Anche questa volta il teorema di Wigner ci viene in aiuto dimostrando che si può fissare la fase contemporaneamente per tutte le funzioni d'onda e per tute le rotazioni.

(?) riguardo a questa seconda strada ho tre dubbi :
1) come si fa a dimostrare che U_R è unitario?
2) perché la posizione $U_R|\psi\rangle \equiv \int \psi(x)\, U_R|\mathbf{x}\rangle\, d^3\mathbf{x}$ garantisce che U_R sia un operatore lienare sullo spazio di Hilbert?
3) non capisco dove 'subentra' la fase arbitraria.

Riguardo al primo dubbio, forse l'unitarietà si dimostra scrivendo i prodotti scalari, e utilizzando la definizione di $U_R\psi$:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int \psi(\mathbf{x})\, \overline{\phi(\mathbf{x})}\, d^3\mathbf{x} =$$

qui utilizziamo la 'definizione' $\left(U_R\psi\right)(R\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x})$

$$= \int \left(U_R\psi\right)(\mathbf{Rx})\, \overline{\left(U_R\phi\right)(\mathbf{Rx})}\, d^3\mathbf{x} =$$

e qui utilizziamo il fatto che una rotazione è una 'riparametrizzazione' di $\mathbb{R}^3$, e quindi l'integrazione non cambia

$$= \langle U_R\psi|\, U_R\phi\rangle .$$

Connessione tra rotazioni e momento angolare

- Rotazioni infinitesime

Una rotazione infinitesima, in quanto trasformazione piccolissima, differisce di poco dall'identità.

Allora la possiamo scrivere come l'identità più lo pseudotensore euclideo associato ad un certo vettore $\boldsymbol{\lambda}$, con davanti un coefficiente infinitesimo $\delta\alpha$:

(per lo pseudotensore vedi Romano, Meccanica Razionale, primo volume pag 107)

$$R \approx \mathbb{I} + \delta\alpha \, M$$

dove M è la matrice rappresentativa dello pseudotensore euclideo associato a $\boldsymbol{\lambda}$, quindi è una matrice antisimmetrica i cui elementi sono $M_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\lambda_\sigma$; ossia, esplicitamente :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(?)dubbio :
Vorrei una dimostrazione più rigorosa del fatto che una rotazione infinitesima si può approssimare con l'identità più questa matrice antisimmetrica. Sembrerebbe una sorta di sviluppo in serie troncato al prim'ordine...
Mi sono dato una spiegazione 'intuitiva' considerando che applicare lo pseudotensore euclideo associato a λ ad un vettore posizione $\mathbf{x}$ significa fare il prodotto vettoriale $\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\lambda}$ (vedi Romano, Meccanica Razionale, primo volume pag 107), e allora se pensiamo al vettore λ come ad un vettore associato ad una certa rotazione, diretto lungo l'asse della rotazione (direzione tale da vedere la rotazione in senso antiorario) e col modulo pari all'angolo della rotazione, questa posizione ha intuitivamente senso.

Allora possiamo scrivere

$$\left(U_R\psi\right)(\mathbf{x}) = \psi\left(R\mathbf{x}\right) \approx$$

$$\approx \psi(\mathbf{x} + \delta\alpha\, M\mathbf{x})$$

adesso possiamo fare uno sviluppo in serie della ψ :

$$\approx \psi(\mathbf{x}) + \delta\alpha\, M_{\mu\nu}\, x_{\nu} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_{\mu}}$$

$$= \left[\mathbb{I} + \delta\alpha\, M_{\mu\nu}\, x_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \right] \psi(\mathbf{x})$$

e ricordando l'espressione delle componenti di M

$$M_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\sigma} \lambda_{\sigma}$$

abbiamo

$$\left(U_R \psi\right)(\mathbf{x}) = \left[\mathbb{I} + \delta\alpha\, \varepsilon_{\mu\nu\sigma}\, \lambda_{\sigma}\, x_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \right] \psi(\mathbf{x}) .$$

Rappresentazione del momento angolare

La definizione classica di momento angolare, prendendo il polo nell'origine, è

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$$

cioè il momento angolare di un punto materiale è il prodotto vettoriale della posizione per il momento lineare (quantità di moto).

Il prodotto vettoriale è espresso da uno pseudotensore euclideo, e dunque in una base ortonormale le sue componenti sono

$$L_i = (x \wedge p)_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, p_k$$

Facendo una quantizzazione canonica, cioè 'promuovendo' le coordinate canoniche x_i e p_i ad operatori hermitiani si ha che l'operatore che rappresenta la componente i del momento angolare è

$$L_i = -i\, \varepsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

(per semplicità scegliamo unità di misura in cui $\hbar=1$).

L'operatore $U_{\mathbf{R}}$ in funzione del operatore $\mathbf{L}$

Siamo adesso in grado di fornire la relazoine tra l'operatore unitario U_R associato alla rotazione R e l'operatore hermitiano $\mathbf{L}$ che rappresenta il momento angolare.

Infatti mettendo insieme l'espressione (approssimata) dell'operatore U_R associato alla rotazione infinitesima R trovata prima :

$$\left(U_R\psi\right)(\mathbf{x}) = \left[\mathbb{I} + \delta\alpha\, \varepsilon_{\mu\nu\sigma}\, \lambda_\sigma\, x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right] \psi(\mathbf{x})$$

con l'espressione del momento angolare appena trovata

$$L_i = -i\, \varepsilon_{ijk}\, x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$$

possiamo scrivere

$$= \left[\mathbb{I} - i\,\delta\alpha\ \lambda_\sigma\, L_\sigma\right] \psi(\mathbf{x})$$

(non mi trovo : i dovrebbe andare al denominatore, e quindi, razionalizzando, ci dovrebbe essere un + e non un -. La cosa si può risolvere dicendo che la rotazione infinitesima è l'identità 'meno' una matrice hermitiana infinitesima. Tuttavia, anche se si lascia questo segno, si ha semplicemente un risultato finale con un segno cambiato (l'argomento dell'esponenziale viene col segno + e non col segno meno, vedi oltre))

$$= \left[\mathbb{I} - i\,\delta\alpha\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{L}\right] \psi(\mathbf{x}).$$

Poiché questa relazione è vera per ogni funzione d'onda ψ possiamo concludere che

$$U_R = = \mathbb{I} - i\,\delta\alpha\ \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{L}$$

Rotazioni finite e forma esponenziale

Partiamo dall'espressione della rotazione infinitesima (quella che non ho capito come giustificare, e che sembra uno sviluppo in serie) :

$$R \approx \mathbb{I} + \delta\alpha\, M =$$

$$R_\lambda \simeq \delta_{\mu\nu} + \delta\alpha\, \varepsilon_{\mu\nu\sigma}\, \lambda_\sigma$$

dove ricordiamo che $\boldsymbol{\lambda}$ è il vettore che è diretto lungo l'asse della rotazione, nel verso da cui si vede la rotazione antioraria, e che ha come modulo l'angolo di rotazione.

A questo punto possiamo introdurre la terna di matrici hermitiane $\boldsymbol{l}$ definita nel modo seguente

$$\left(l_\mu\right)_{\nu\sigma} = -i\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma}$$

(questa è l'espressione dell'elemento di matrice di una delle tre matrici)

in modo da poter scrivere :

$$R_\lambda \simeq \delta_{\mu\nu} - i\,\delta\alpha\,\lambda_\sigma\, l_\sigma$$ (stessa questione del segno)

$$= \delta_{\mu\nu} - i\,\delta\alpha\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{l} \; .$$

Ricordiamo che fin'ora abbiamo considerato rotazioni infinitesime

Adesso, sia per le rotazioni su $\mathbb{R}^3$ che per i corrispondenti operatori unitari, possiamo passare dalle rotazioni infinitesime alle rotazioni finite.

Possiamo dire che una rotazione finita è la somma di un numero infinito di rotazioni infinitesime. Allora possiamo scrivere una rotazione finita come :

$$R_\lambda = \lim_{n\to\infty} \left[1 - i\,\delta\alpha\,\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{l}\right]^n \; .$$

Poiché $n \to \infty$, possiamo rappresentare il coefficiente infinitesimo come $1/n$. Allora si ha

$$R_{\lambda} = \lim_{n \to \infty} \left[\mathbb{I} - i \frac{\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{l}}{n} \right]^n = e^{i\, \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{l}}$$

dove abbiamo utilizzato il limite notevole

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n = e^a \; .$$

Analogamente, per gli operatori unitari associati alle rotazioni finite possiamo scrivere :

$$U_{R_{\lambda}} = \lim_{n \to \infty} \left[\mathbb{I} + i \frac{\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{L}}{n} \right]^n = e^{i\, \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{l}} \; .$$

Per rendere più chiaro il nesso con le rotazioni possiamo scrivere il vettore $\boldsymbol{\lambda}$ come un versore $\mathbf{n}$ per un numero α che rappresentano rispettivamente l'asse e l'angolo della rotazione.

In questo modo la matrice che rappresenta

Considerazioni finali

«In meccanica classica, nel formalismo Hamiltoniano (algebra lineare), già possiamo dire che il momento angolare di un punto materiale coincide con la funzione generatrice delle trasformazioni canoniche corrispondenti alle rotazioni dello spazio (fisico) $\mathbb{R}^3$» (Onofri Destri, pag 269).

Il teorema di Stone permette di importare, dal formalismo Hamiltoniano classico (algebra lineare) al formalismo quantistico, la definizione di generatore infinitesimale di gruppo di trasformazioni ad un parametro (vedi anche derivata di Lie).

Nel formalismo quantistico il gruppo di trasformazioni ad un parametro è rappresentato dagli operatori unitari(infatti questi hanno la struttura di gruppo), mentre il generatore è rappresentato da un operatore hermitiano.

Il fatto che un operatore unitario sia rappresentabile in forma esponenziale, con all'esponente l'unità immaginaria per un operatore hermitiano risulta logico se si ricorda l'analogia "operatori lineari - numeri complessi" secondo la quale un operatore unitario si mette in analogia con un numero complesso a modulo unitario ed un operatore hermitiano si mette in analogia con un numero reale.

(quello che segue l'ho preso dagli appunti di Nicodemi)

Possiamo infine dire che l'Hamiltoniano è il generatore infinitesimale delle 'traslazioni temporali', e il momento lineare è il generatore infinitesimale delle traslazioni spaziali.

Una variabile dinamica è invariante sotto una trasformazione canonica generata da una certa funzione generatrice se l'operatore che rappresenta la variabile, e l'operatore che risulta dalla quantizzazione canonica della funzione generatrice commutano.