CRISI DELLA MECCANICA CLASSICA

*Radiazione elettromagnetica di corpo nero

per tutti i corpi valgono le seguenti definizioni :

radiazione incidente -> radiazione assorbita

\
V

radiazione riflessa

coefficiente di assorbimento = (radiazione incidente) / (radiazione assorbita)

Kircchoff dimostrò, su basi termodinamiche, che il rapporto

$$f_T(\nu) = \frac{\text{(potenza emessa per unità di area ad una certa } \nu)}{\text{(coefficiente di assorbimento per quella } \nu)}$$

dipende dalla frequenza ν e dalla temperatura assoluta T, ma è uguale per tutti i corpi.

Si definisce **Corpo Nero** un corpo per il quale la radiazione incidente è tutta assorbita, cioè per cui il coefficiente di assorbimento è 1. Ciò vuol dire che all' equilibrio termodinamico deve essere (radiazione assorbita) = (radiazione emessa).

Allora tale rapporto è uguale alla potenza emessa dal corpo nero a temperatura T, per la frequenza ν, in quanto per esso il denominatore è 1.

Quindi lo "spettro di corpo nero", cioè la curva che esprime per una data T la potenza irraggiata dal corpo nero in funzione della frequenza ν è una caratteristica "universale".

Può essere quindi interessante da studiare.

Un piccolo foro praticato sulle pareti di un corpo (metallico) cavo è una buona approssimazione di corpo nero, in quanto se una radiazione vi incide, è molto improbabile che riflettendosi sulle pareti interne, riesca dal foro stesso. Se le pareti interne vengono tenute a temperatura T, all' equilibrio la radiazione emessa e la radiazione assorbita dal foro devono essere uguali. D'altra parte la radiazione emessa dal foro è uguale a quella contenuta nella cavità.

Concludendo, all' interno di una cavità (a pareti termostatate) vi è una radiazione di corpo nero.

Si vuole studiare un modello teorico per tale radiazione.

Poniamo

$U(\nu,T)$ = potenza emessa dal corpo nero per unità di sup. (temp.=T, freq.=ν)

$U(T) = \int_0^\infty U(\nu,T)\,d\nu$ = potenza totale emessa (temp.=T)

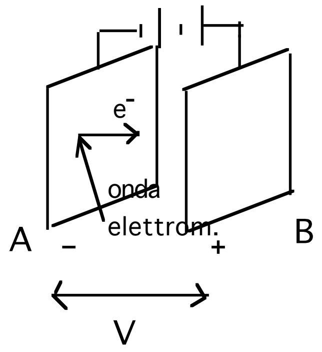
Il nostro modello teorico si deve confrontare con la legge sperimentale, cioè costruita empiricamente da Stefan-Boltzmann :

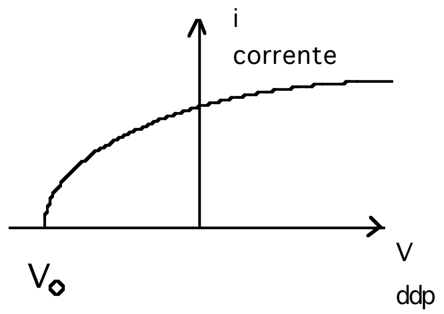
$$U(T) = \sigma T^4 \qquad \left(\sigma = 5.67 \text{ X } 10^{-8} \ \frac{W}{m^2\ K}\right)$$

Un primo modello lo Propongono Rayleig-Jeans :

[…]

* Effetto fotoelettrico





Se un' onda elettromagnetica incide su una piastra metallica, dalla piastra "partono" degli elettroni. Per misurare tale effetto si crea una ddp.
Se V è negativo (V(B) < V(A)) si misura comunque una corrente di elettroni. Ciò fa pensare che l' onda incidente scambia (in particolare fornisce) energia con gli elettroni della piastra A, che quindi emergono con una certa **energia cinetica.**

Qual' è, al più, l'energia cinetica che posseggono gli elettroni?
E' pari alla massima ddp "contraria" che riescono a superare, moltiplicata per la carica e dell' elettrone.

$$K_{max} = e\,V_0$$

Dai dati sperimentali (Millikan, 1914, (Nobel)) si ha che V_0 non dipende dall' intensità E_0 dell' onda, ma dipende, linearmente, dalla frequenza; inoltre c' è una frequenza ν_0 al di sotto della quale non c'è più effetto fotoelettrico.

Calcoliamo classicamente l' energia che passa per una superfice $d\vec{S}$ attraversata da un’onda elettromagnetica:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}$$ vettore di Pointing

$$E = \vec{I} \cdot d\vec{S}$$ Energia = flusso del vettore di Pointing attraverso $d\vec{S}$

Incongruenze tra la teoria classica (teoria ondulatoria) e i dati sperimentali:

1) Il campo $\vec{E}$ aumenta all’ aumentare dell’ ampiezza dell’ onda, e poiché la forza di cui risente il singolo elettrone è $e\vec{E}$, tale forza dovrebbe aumentare con l’ampiezza dell’ onda, cioè con l’ “intensità”.
Ma quello che succede è che aumentando l’ intensità, più elettroni vengono estratti per unità di tempo, cioè aumenta la corrente, ma il voltaggio “di stop”, cioè l’energia cinetica massima che l’ onda riesce a fornire agli elettroni è sempre la stessa :

$$K_{max} = e V_0$$

2) Un’onda di qualunque frequenza fornisce sempre energia (come detto prima, in ragione della sua ampiezza massima, cioè dell’ intensità). Quindi, purché l’ onda sia abbastanza intensa, ci dovrebbe essere effetto fotoelettrico per qualunque frequenza ν dell’ onda incidente.
Ma sperimentalmente c’è una frequenza minima ν_0 al di sotto della quale un’ onda di intensità comunque alta non produce effetto fotoelettrico.

3) L’energia dell’ onda dovrebbe essere distribuita uniformemente lungo tutta l’onda, quindi se usiamo un’onda di intensità abbastanza bassa, dovremmo osservare un intervallo di tempo tra quando l’onda comincia a fornire energia agli elettroni e quando il primo elettrone, accumulata abbastanza energia, emerge.
Ma sperimentalmente non si è mai osservato un intervallo di tempo.

La **teoria dei fotoni di Einstein** scioglie queste incongruenze :

Secondo Einstein le radiazioni elettromagnetiche sono costituite da “pacchetti” detti fotoni, ognuno con energia $h\nu$, dove ν è la frequenza dell’onda e h è una costante universale.I fenomeni di **interferenza** e di **diffrazione** sono legati a come si propagano le onde, e sono dovuti al comportamento “medio” dei fotoni, cioè al risultato dell’interazione tra i numerosi fotoni contenuti nell’onda. Quindi tali fenomeni di “propagazione” conviene trattarli con la teoria ondulatoria.
Ma il modo in cui le radiazioni elettromagnetiche **interagiscono** con la materia è di tipo **corpuscolare.** Questo approccio risolve le tre questioni di cui sopra:

1) Se si aumenta l’ intensità dell’onda, si aumenta il numero di fotoni trasportati per unità di tempo, quindi si aumenta l’energia trasportata. Ma l’energia trasportata da ogni

singolo fotone è sempre hν. Poiché ogni elettrone interagisce con un solo fotone, l' energia cinetica massima $K_{max} = e\,V_0$ sarà comunque

$$e\,V_0 = h\,\nu - w_0$$

dove w_0 è il lavoro di estrazione.

Comunque, aumentando l'intensità, aumenta (linearmente) il numero di interazioni per unità di tempo, e quindi aumenta (linearmente) la corrente.

2) Se si diminuisce la frequenza ci sarà una frequenza minima per la quale

[1]

cioe` non si riesce a dare energia cinetica agli elettroni (l' energia e` sufficente a compiere solo il lavoro di estrazione)

3) Poiche` l' energia della radiazione e` concentrata nello spazio in "pacchetti", non importa quanto intensa sia la radiazione, essa fa emergere l'elettrone istantaneamente, appena incide.

OSSERVAZIONE
Nell' effetto fotoelettrico si usano raggi ultrtavioletti, cioe` radiazioni di frequenza tale che l' energia [h ni] dei fotoni sia, sepur maggiore, paragonabile al lavoro di estrazione. Cio` significa che non si puo` trascurare che l'elettrone e` lagato alll' atomo. Tramite le forze di legame, l'energia del fotone incidente viene trasmessa all' atomo la cui grande massa [assorbe (grassetto)] il fotone.

* Effetto Compton [figura]
(Mencuccini II e Eisberg-Resnick)
Facciamo incidere una radiazione ad alta frequenza su un bersaglio.
Tutt' intorno al bersaglio si osservano radiazioni di due lunghezze d'onda differenti: una, di lunghezza d'onda uguale a quella incidente, l'altra maggiore e dipendente dall'angolo di osservazione, cioe` l'angolo formato dalla direzione di osservazione e la direzione della radiazione incidente.(vedi fig)

La [teoria classica (bold)] prevede che se si fa incidere una radiazione elettromagnetica su un elettrone libero (in questo caso di radiazione ad alta energia possiamo considerare l'elettrone come libero. Vedi osservazione alla fine del paragrafo prerc.) il vettore [E vettore] oscillante con frequenza [ni], fa oscillare l'elettrone con la [stessa frequenza (bold)].

La teoria dei fotoni di Einstein riesce a dare conto della seconda frequenza, e della configurazione delle radiazioni.

Alla luce della teoria dei fotoni, l'interazione tra la radiazione elettromagnetica (molto piu` energetica di quella per l' effetto fotoelettrico) e la materia si puo` considerare come un urto elastico tra particelle.

- Alcuni fotoni urtano contro gli ioni interni, di massa tanto grande da essere come una parete: il fotone viene deflesso, come in un urto perfettamente elastico, non modificando la sua energia cinetica, cioe` la sua frequenza.
Questo da conto della radiazione della stessa frequenza di quella incidente, che si osserva da ogni angolazione.

- Alcuni fotoni urtano contro gli elettroni esterni (di valenza). Possiamo considerare questo come un urto tra una particella di energia cinetica h [ni] e velocita` c (il fotone) e una particella libera e ferma (l'elettrone) (siamo nel caso h [ni] >> Wo)

Allora impostiamo le equazioni per risolvere questo problema di urto.

Conservazione del momento della quantita` di moto

Po = P1 cos [teta] + P cos [fi]

Conservazione dell'energia
(poiche` il fotone e, spesso anche l'elettrone dopo l'urto, si muovono a velocita` paragonabile con c, bisogna considerare l'energia relativistica)

[...]

*Effetto Compton

descrizione:

Si fa incidere una radiazione elettromagnetica intensa (raggi X o raggi γ) su un materiale (solido luquido o gas) di basso peso atomico (es. carbone).
Tutt' intorno all' oggetto irradiato si osserva una radiazione diffusa, con due lunghezze d'onda: la lunghezza d'onda λ, uguale a quella della radiazione incidente, insieme con una radiazione con lunghezza d'onda $\lambda' > \lambda$.
La differenza $\lambda' - \lambda$ è uguale per tutte le sostanze, e dipende solo dalla direzione dalla quale si osserva, in particolare

$$\lambda' - \lambda = 0{,}024\ \text{á}1 - \cos\theta\,\text{é} \qquad \text{D}$$

dove θ è l'angolo tra la direzione della radiazione incidente e la direzione di osservazione.

osservazioni qualitative:

teoria elettromagnetica classica:

Se un' onda elettromagnetica, che immaginiamo polarizzata per semplicità, 'investe' un elettrone in quiete, questi comincerà a vibrare con la stessa frequenza. diverrà quindi a sua volta una sorgente di onde (riflesse, o 'diffuse') che avranno la stessa frequenza di quelle incidenti. (?) (verificare!).
E' quindi impossibile spiegare la radiazione diffusa di lung. d' onda λ' diversa da quella incidente.

teoria dei quanti (fotoni):
è possibile spiegare la radiazione con lunghezza d'onda maggiore, cioè frequenza minore, cioè minore energia, pensando alla radiazione come composta da corpuscoli: i fotoni.
Se si tratta l' interazione tra un fotone e un elettrone del bersaglio come un urto tra particelle, per la conservazione di energia a quantità di moto, il fotone che emerge dall' urto deve avere un' energia minore, e ciò spiega λ'.

trattazione quantitativa:

Bisogna ricorrere ad una trattazione relativistica (vedi), data la velocità dei fotoni.

Supponiamo l' elettrone inizialmente libero e fermo, con massa a riposo m_e, e diciamo $\vec{v}$ la sua velocità dopo l'urto. La conservazione di energia e quantità di moto in meccanica relativistica si scrivono:

$$m_e c^2 + h\nu = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + h\nu'$$

(conservazione dell'energia)

$$\frac{h\nu}{c}\hat{l} = \frac{m_e \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{h\nu'}{c}\hat{l}'$$

(cons. della quantità di moto)

dove:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad ; \quad \nu' = \frac{c}{\lambda'}$$

$\hat{l}$ e $\hat{l}'$ sono i versori delle direzioni del fotone incidente e di quello diffuso

Commenti alle formule

conservazione dell' energia:
A **sinistra** abbiamo l' energia di massa dell' elettrone (che è fermo) + l' energia del fotone "incidente", che , in accordo con le conclusioni di Plank (vedi corpo nero) è $h\nu$,

mentre, essendo la sua massa a riposo nulla, non ha energia di massa.

A **destra** abbiamo <u>l' energia $m\,c^2$ dell' elettrone</u> con velocità v e l' energia $h\,\nu'$ del <u>fotone "emergente"</u>.

conservazione della q. di m.:
A **sinistra** abbiamo il vettore (tridimensionale) della q. di m. del fotone incidente (l' elettrone ha q. di m. nulla).
A **destra** abbiamo la somma vettoriale dei vettori q. di m. dell' elettrone (massa 'corretta') e del fotone emergente.

Poiché il primo vettore è uguale alla somma degli altri due, i tre vettori formano un triangolo, quindi possiamo applicare il teorema di Carnot ai loro moduli:

$$\frac{m_e^{\,2}}{1 - v^2/c^2}\,v^2 = \frac{h^2\,\nu^2}{c^2} + \frac{h^2\,\nu'^2}{c^2} - 2\,\frac{h^2\,\nu\,\nu'}{c^2}\cos\theta$$

Dove θ è l' angolo compreso tra le traiettorie del fotone incidente e di quello emergente.

Mettiamo a sistema questa equazione con quella della conservazione dell' energia:

$$\begin{cases} \dfrac{m_e^{\,2}}{1 - v^2/c^2}\,v^2 = \dfrac{h^2\,\nu^2}{c^2} + \dfrac{h^2\,\nu'^2}{c^2} - 2\,\dfrac{h^2\,\nu\,\nu'}{c^2}\cos\theta \\ m_e\,c^2 + h\,\nu = \dfrac{m_e\,c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + h\,\nu' \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2\,c^2 = h^2\,\nu^2 + h^2\,\nu'^2 - 2\,h^2\,\nu\,\nu'\cos\theta \\ E_0 + h\,\nu = E + h\,\nu' \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato la seconda:

$$\begin{cases} p^2\,c^2 = h^2\,\nu^2 + h^2\,\nu'^2 - 2\,h^2\,\nu\,\nu'\cos\theta \\ E^2 = \left(E_0 + h\,\nu - h\,\nu'\right)^2 \end{cases}$$

Consideriamo ora il quadrivettore momento lineare:

$$\underline{p} = \left(m\,v_x, m\,v_y, m\,v_z, m\,c\right) = \left(P, m\,c\right)$$

Se moltiplichiamo questo quadrivettore per la velocità della luce, che è un invariante, otteniamo un altro quadrivettore:

$$c\,\underline{p} = \left(c\,\mathbf{p}\,,\, m\,c^2 \right) = \left(c\,\mathbf{p}\,,\, E \right)$$

Entrambe le norme di quasti quadrivettori sono allora degli invarianti. Sappiamo che la norma quadra di $\underline{p}$ è (vedi) :

$$\left\| \underline{p} \right\|^2 = p^2 - m^2\,c^2 = [...] = -\,m_0^{\ 2}\,c^2$$

allora la norma quadra di $c\,\underline{p}$ è:

$$\left\| c\ \underline{p} \right\|^2 = c^2\ \left\| \underline{p} \right\|^2 = c^2\,p^2 - E^2 = -\,m_0^{\ 2}\,c^4$$

Ricordando ciò, sottraiamo la seconda dalla prima equazione del sistema:

$$p^2\,c^2 - E^2 = h^2\,\nu^2 + h^2\,\nu'^{\,2} - 2\,h^2\,\nu\,\nu'\cos\theta - \left(E_0 + h\,\nu - h\,\nu' \right)^2$$

$$-\,m_0^{\ 2}\,c^4 = h^2\,\nu^2 + h^2\,\nu'^{\,2} - 2\,h^2\,\nu\,\nu'\cos\theta - E_0^{\ 2} - h^2\nu^2 - h^2\nu'^{\,2} - 2\,E_0\,h\,\nu$$
$$+\,2\,E_0\,h\,\nu' + 2\,h^2\,\nu\,\nu'$$

$$0 = 2\,E_0\,h\left(\nu' - \nu \right) + m_0^{\ 2}\,c^4 - 2\,h^2\,\nu\,\nu'\cos\theta + 2\,h^2\,\nu\,\nu' - E_0^{\ 2}$$

$$2\,E_0\,h\left(\nu - \nu' \right) = m_0^{\ 2}\,c^4 + 2\,h^2\,\nu\,\nu'\left(1 - \cos\theta \right) - m_0^{\ 2}\,c^4$$

$$\nu - \nu' = \frac{h\,\nu\,\nu'}{E_0}\left(1 - \cos\theta \right)$$

Volendo passare dalle frequenze alle lunghezze d’onda, ricordando che

$$\nu\,\lambda = \nu'\,\lambda' = c$$

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\nu} \quad ; \quad \frac{\lambda'}{c} = \frac{1}{\nu'}$$

si ha:

$$\nu - \nu' = \frac{h\,\nu\,\nu'}{m_0\,c^2}\left[1 - \cos\theta\right]$$

$$\frac{\nu - \nu'}{\nu\,\nu'}\,c = \frac{h}{m_0\,c}\left[1 - \cos\theta\right]$$

$$\frac{\nu}{\nu\,\nu'}\,c - \frac{\nu'}{\nu\,\nu'}\,c = \frac{h}{m_0\,c}\left[1 - \cos\theta\right]$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0\,c}\left[1 - \cos\theta\right]$$

Sostituendo i valori numerici alle costanti otteniamo proprio l' andamento sperimentale riportato all' inizio. Cio' prova la validità della teoria.

*Calori Specifici

*Esperimento di Davisson e Germer
(Mattews)

Un fascio di elettroni riflesso dalla superfice di un cristallo di nikel presenta righe di diffrazione, esattamente analoghe a quelle di un raggio di luce diffratto da un reticolo di diffrazione.

Tale fenomeno di diffrazione persiste anche quando l'intensità del raggio è così bassa che attraverso l'apparato passa un elettrone alla volta.
Quest'ultima circostanza esclude che alla base del fenomeno ci sia un'interazione tra gli elettroni.

Questo esperimento, confermando l' intuizione di de Broglie porta ad associare in qualche modo un'onda al moto di un singolo elettrone, classicamente visto essenzialmente come una particella, con una certa energia E ed un certo momento $\vec{p}$.
Si tratta di fare l'associazione 'inversa' a quella fatta da Plank e Einstein per i fotoni:

ad una particella in $\vec{r}$, con energia E e momento $\vec{p}$ va associata un' onda (di de Broglie)

$$e^{-i\frac{E\,t - \vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}$$

Questa descrizione del moto dell' elettrone si accorda bene con le misurazione della diffrazione fatte da Davisson e Germer.

*Atomo di Thomson

*Atomo di Rutherford

Facendo incidere un (fascio di particelle?) su una lamina d' oro, talmente sottile che il suo spessore era di pochi atomi, Rutherford osservò che gran parte delle (particelle?) passavano indisturbate, (alcune venivano deflesse di poco) mentre alcune, poche, venivano rimbalzate all' indietro.

Le conclusioni che trasse dai fatti furono rispettivamente che : lo spazio occupato dall' atomo è per la maggior parte vuoto; (ci sono gli elettroni (evidenziati da Thomson), ma sono leggeri); il nucleo, in cui è concentrata la maggior parte della massa dell' atomo, è molto piccolo rispetto al tutto, e stà al centro.

Tutto ciò faceva immaginare un sistema 'planetario', ma questo modello aveva problemi di stabilità: l' elettrone, che è una particella carica, orbitando accelera, e quindi deve emettere radiazione elettromagnetica, perdendo energia, e collassando dopo pochissimo sul nucleo.

*Atomo di Bohr

*Esperienza di Franck-Hertz

*Regole di quantizzazione di Wilson-Sommerfield

*L'ipotesi di De Broglie