Addizione di momenti angolari

(Onofri-Destri + appunti vari)

- **Richiami sui momenti angolari**

Dato un certo sistema, consideriamo le tre osservabili date dalla tre componenti del momento angolare del sistema.
Possiamo definire gli operatori che quantizzano queste tre osservabili in due modi :

possiamo <u>partire dalla definizione classica</u>

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(yp_z - zv_y\right) + \hat{j}\left(zp_x - xp_z\right) + \hat{k}\left(xp_y - yp_x\right)$$

e sostituire gli operatori.
Del resto non sussistono problemi di ordinamento in quanto le componenti non omologhe di $\mathbf{X}$ e $\mathbf{P}$ commutano (vedi):

$$L_x = Y P_z - Z P_y$$

$$L_y = Z P_x - X P_z$$

$$L_z = X P_y - Y P_x \quad .$$

Da queste definizioni possiamo ricavare le **regole di commutazione**:

$$\left[L_j , L_k\right] = i \hbar \, \varepsilon_{jkl} \, L_l \qquad \text{(regole di commutazione)}$$

<u>Alternativamente</u> possiamo definire direttamente gli operatori di momento angolare come quegli operatori che soddisfano le suddette regole di commutazione.

Insieme completo di osservabili compatibili

Ricordiamo che per postulato ogni osservabile è rappresentata da un operatore Hermitiano, e si dimostra (metodi) che un operatore Hermitiano è sempre diagonalizzabile, cioè esiste una base dello spazio di Hilbert formata da suoi autovettori (autobase).

Per ‘compatibili’ si intende ‘che commutano’. Ricordiamo che si dimostra che se due (o più) operatori commutano, hanno un’autobase in comune.

Considerando l’insieme degli autovalori di un osservabile (spettro), può capitare che essi siano <u>degeneri</u>, cioè ad un autovalore corrispondono più autovettori distinti.

In tal caso non è possibile individuare un autostato specificando il corrispondente autovalore (o un numero quantico ad esso legato).

In tal caso occorre individuare un osservabile compatibile (cioè che commuta) con la prima, in modo che abbiano l'autobase comune : ogni autostato dell'una è autostato anche dell'altra.
Tuttavia ognia autostato avrà autovalori corrispondenti diversi rispetto ai due operatori.
Allora può capitare che, sebbene gli autovalori del primo operatore siano degeneri (cioè specificandone uno si individua non un autovettore, ma un insieme di essi (autospazio)), specificando due autovalori, uno della prima osservabile e uno della seconda, il primo individua un autospazio, e il secondo, all'interno di questo autospazio, individua un solo autostato. Se questo succede, si dice che la degenerazione di quell'autovalore è stata 'risolta'.

Se la seconda osservabile riesce a risolvere tutti gli autovalori, allora le due osservabili compatibili formano un insieme completo di osservabili compatibili.
In tal caso, succede che specificando una coppia di autovalori, uno della prima e uno della seconda, si individua sempre un solo autostato (comune).

Se l'aggiunta di una seconda osservabile compatibile non 'risolve' completamente tutte le degenerazioni, se ne può aggiungere una terza, e così via.
Il minimo insieme di osservabili compatibili che risolve completamente l'autobase comune viene detto appunto insieme completo di osservabili compatibili.

In genere il primo operatore che si considera è l'Hamiltoniano (energia totale) del sistema.
Questo perché a causa dell'equazione di Schrödinger, la sua autobase in meccanica quantistica assume grande rilevanza.

- **Autobase dello spazio di Hilbert**

Poiché i tre operatori che rappresentano le tre componenti del momento angolare non commutano, non possono costituire un insieme completo di osservabili compatibili.

Quantizziamo quindi l'osservabile data dal <u>modulo quadro del momento angolare</u>:

$$L^2 \overset{\text{def}}{=} L_x^{\,2} + L_y^{\,2} + L_z^{\,2}$$

Tale operatore commuta con L_x , L_y , e L_z , cioè si ha che :

$$\left[L^2 ,L_i\right] = 0 \quad , \forall\ i = x, y, z$$

.

Allora per ottenere un insieme completo di osservabili compatibili possiamo usare L_z e L^2.
Osserviamo che quanti e quali osservabili formano un insieme completo di osservabili compatibili dipende dal sistema che stiamo studiando.

In particolare bisogna consiederare la dimensione dello spazio delle configurazioni del sistema, cioè il numero di gradi di libertà.

Autovalori e autovettori di $\mathbf{L^2}$ e $\mathbf{L_z}$

Scriviamo le equazioni agli autovalori per i due operatori L^2 e L_z .
Notiamo che la dimensione fisica del momento angolare è uguale a quella di un azione.

Infatti :
azione = energia x tempo = lunghezza x forza x tempo =
lunghezza x (massa xlunghezzaxtempo^{-2})xtempo =
= lunghezza^2 x massa x tempo^{-1}

momento angolare = lunghezza x quantità di moto =
= lunghezza x massa x lunghezza x tempo^{-1} =
= lunghezza^2 x massaxtempo^{-1}

Allora scriviamo i rispettivi autovalori come un numero adimensinale moltiplicato per $\hbar^2$ e $\hbar$ rispettivamente :

$$L^2 \, |l, m\rangle = \lambda \, \hbar^2 \, |l, m\rangle$$
$$L_z \, |l, m\rangle = m \, \hbar \, |l, m\rangle$$

Proposizione : Gli <u>autovalori</u> di L^2 sono tutti <u>positivi</u>

Per comodità nel seguito, poniamo

$$\begin{cases} \lambda = l(l + 1) \\ \quad l > 0 \end{cases}$$

(si dimostra che per ogni valore di λ esiste un unico valore di l che soddisfa queste due relazioni).

In definitiva

$$L^2 \, |l, m\rangle = l(l+1) \, \hbar^2 \, |l, m\rangle$$
$$L_z \, |l, m\rangle = m \, \hbar \, |l, m\rangle$$

Gli operatori "gradino" $\mathbf{L_+}$ e $\mathbf{L_-}$

definiamo i seguenti due operatori :

$$L_+ \stackrel{\text{def}}{=} L_x + i\,L_y$$

$$L_- \stackrel{\text{def}}{=} L_x - i\,L_y$$

Tali operatori sono l'uno l'aggiunto dell'altro, quindi non sono autoaggiunti, e quindi non sono la quantizzazione di nessun'osservabile.

Dalle definizioni e dalle regole di commutazione possiamo esprimere le tre componenti del momento angolare, e il suo modulo quadro, in termini di tali due operatori.

Azione degli operatori gradino e caratterizzazione dell'autobase comune

Introducendo ora tre lemmi e un teorema, caratterizzeremo l'azione di questi operatori gradino, nonché l'autobase comune dell'insieme completo di osservabili compatibili di un eventuale sistema.
Nel seguito supporremo che esista un certo insieme completo di operatori compatibili formato da L^2, L_z, e da uno o più operatori (tipicamente uno di essi è l'Hamiltoniano).
Raggrupperemo dunque gli autovalori degli altri operatori sotto il simbolo k.
In tal modo ogni autostato del sistema è individuato da un valore di k e dai due autovalori di L^2 e L_z.

(per le dimostrazioni di ciò che segue vedi momenti angolari)

Lemma $\mathbf{I}$ (proprietà degli autovalori di L^2 e L_z) :

Se $|k, l, m\rangle$ è un autovalore comune a L^2 e L_z tale che

$$L^2\,|k, l, m\rangle = l(l+1)\,\hbar^2\,|k, l, m\rangle$$
$$L_z\,|k, l, m\rangle = m\,\hbar\,|k, l, m\rangle$$

si ha :

$$-l \leq m \leq l$$

Lemma $\mathbf{II}$ (proprietà del vettore $L_-\,|k, l, m\rangle$)
Se $|k, l, m\rangle$ è un autovalore comune a L^2 e L_z tale che

$$L^2\,|k, l, m\rangle = l(l+1)\,\hbar^2\,|k, l, m\rangle$$

$$L_z\,|k, l, m\rangle = m\,\hbar\,|k, l, m\rangle$$

si ha :

i) $m = -l \quad \Leftrightarrow \quad L_- \,|\, k, l, m\rangle = 0$

ii) $m > -l \quad \Rightarrow \quad L_- \,|\, k, l, m\rangle = \text{cost}\,|\, k, l, m-1\rangle$

Lemma III (proprietà del vettore $L_+ \,|\, k, l, m\rangle$)

Se $|\, k, l, m\rangle$ è un autovalore comune a L^2 e L_z tale che

$$L^2 \,|\, k, l, m\rangle = l(l+1)\,\hbar^2\,|\, k, l, m\rangle$$

$$L_z \,|\, k, l, m\rangle = m\,\hbar\,|\, k, l, m\rangle$$

si ha :

i) $m = l \quad \Rightarrow \quad L_+ \,|\, k, l, m\rangle = 0$

ii) $m < l \quad \Rightarrow \quad L_+ \,|\, k, l, m\rangle = \text{cost}\,|\, k, l, m+1\rangle$

In definitiva, calcolando anche le costanti di normalizzazione l'azione di L_+ e L_- è riassunta dalle formule

$$L_+ \,|l, m\rangle = \hbar\,\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\,|l, m+1\rangle$$

$$L_- \,|l, m\rangle = \hbar\,\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\,|l, m-1\rangle$$

(azione degli operatori gradino)

L'enunciato del seguente teorema, la cui dim. è basata sui tre precedenti lemmi, caratterizza l'autobase comune.

Nota: poiché è possibile esprimere le osservabili fisiche legate al momento angolare (tre componenti e modulo quadro) in termini di questi operatori gradino, conoscendone l'azone sull'autobase del sistema, è facile ricavare gli **elementi di matrice** di dette osservabili in tale rappresentazione.

Teorema (che caratterizza l'autobase comune) :

Ip

$|\, k, l, m\rangle$ è un autovalore comune a L^2 e L_z tale che

$$L^2 \,|\, k, l, m\rangle = l(l+1)\,\hbar^2\,|\, k, l, m\rangle$$

$$L_z \,|\, k, l, m\rangle = m\,\hbar\,|\, k, l, m\rangle$$

Th

I valori <u>possibili</u> per l sono :

$$\left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right\} \quad ,$$

cioè valori seminteri.

I valori possibili per m, una volta fissato l, sono i $2l+1$ valori

$$-l,\ (-l+1),\ldots,(l-1),l$$

(l può essere intero o semidispari. Fissato l, m è del tipo di l)

• Addizione di momenti angolari

Sia

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

l'operatore vettoriale che quantizza il momento angolare di un certo sistema, e che è la somma di due altri momenti angolari.

Stabiliamo che i due momenti angolari 'addendi' siano compatibili, cioè che sia possibile misurare entrambi senza che l'operazione di misura di uno influenzi l'altro.
In altre parole vogliamo che gli operatori rappresentativi dei momenti addendi commutino.

Per fissare le idee possiamo pensare al momento angolare totale scritto come somma dei due momenti angolari di due parti del sistema.
Oppure possiamo pensare al momento angolare totale scritto come somma del momento angolare orbitale e del momento angolare di spin.

Scriviamo la relazione di somma per componenti :

$$\begin{aligned}\left(J_x, J_y, J_z\right) &= \left(J_{1x}, J_{1y}, J_{1z}\right) + \left(J_{2x}, J_{2y}, J_{2z}\right) \\ &= \left(J_{1x}+J_{2x}, J_{1y}+J_{2y}, J_{1z}+J_{2z}\right)\end{aligned}$$

quindi per le componenti del momento angolare c'è 'additività', cioè ad esempio :

$$J_z = J_{1z} + J_{2z} \quad .$$

Invece, per il modulo quadro del momento angolare non c'è additività.
Infatti si ha :

$$J^2 = \left(J_1 + J_2\right)^2 =$$

$$= J_1^{\,2} + 2\,\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 + J_2^{\,2} =$$

$$= J_1^{\,2} + 2\left(J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z}\right) + J_2^{\,2} .$$

Spettro del momento risultante

Vogliamo studiare lo spettro del momento angolare totale, cioè degli operatori J^2 e J_z.

Cominciamo col ricordare che, essendo tutti momenti angolari, sia per il momento risultante che per i "momenti addendi" esiste un'autobase comune degli operatori scalari "modulo quadro" e "componente z".

Multipletti

Riassumiamo in altri termini.
Il momento angolare risultante è appunto un momento angolare.
Allora per gli autovalori simultanei degli operatori J^2 e J_z valgonono le regole caratteristiche dei momenti angolari.
In particolare esistono degli autospazi, che chiameremo V_j, formati da loro autovettori comuni, relativi allo stesso numero quantico j di J^2 e a tutti i numeri quantici m di J_z con $-j \leq m \leq j$. In altre parole sono gli autospazi degeneri di J^2.

Questi autospazi vengono detti **multipletti**.

Vogliamo adesso stabilire che rapporti ci sono tra le due autobasi dei momenti 'addendi' e l'autobase del momento risultante.

Enunciato del teorema di addizione dei momenti angolari

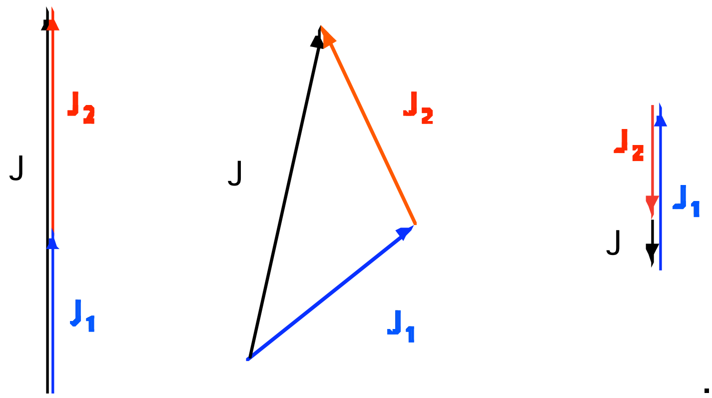
Consideriamo due momenti angolari addendi, e il momento angolare che risulta dalla loro somma.

Chiamiamo gli operatori e i numeri quantici relativi ai moduli quadri e alle componenti z con l'ovvia notazione che abbiamo usato fin qui.

Fissati i due (numeri quantici relativi ai) moduli quadri dei momenti addendi, j_1 e j_2, il (numero quantico relativo al) modulo quadro del momento risultante deve appartenere all'intervallo $[\ |j_1 - j_2|\ , j_1 + j_2\ ]$.

Fissato il (numero quantico relativo al) modulo quadro del momento angolare totale, (il numero quantico relativo al)la componente z del momento angolare totale può assumere i valori appartenenti all'intervallo $[\ -j\ , j\ ]$.

Questo teorema esprime semplicemente la proprietà triangolare, secondo la quale (la lunghezza de) un lato di un triangolo è sempre compreso tra la somma degli altri due e la loro differenza, e questo vale anche per i moduli dei due vettori addendi e della loro somma (in quanto i vettori formano un triangolo):



Tuttavia questa è solo una dimostrazione intuitiva, in quanto j è il numero quantico associato al modulo quadro del momento angolare risultante, e non al suo modulo. Esiste una dimostrazione più complessa e rigorosa, che tiene conto dei numeri quantici, e che riportiamo in quanto segue.

- Dimostrazione rigorosa -

Autovettori del momento risultante scritti come prodotti tensoriali

Un altro punto è che l'autospazio del momento risultante è la somma diretta degli autospazio dei momenti "addendi" ((?) controllare l'esattezza di questa affermazione).

In altre parole le funzioni d'onda che formano l'autobase comune di J_1^2 e J_{1z} sono vettori di un certo spazio di Hilbert, mentre le funzioni d'onda che formano l'autobase comune di J_2^2 e J_{2z} sono vettori di un altro spazio di Hilbert; infine le funzioni d'onda che formano l'autobase comune di J^2 e J_z sono vettori dello spazio di Hilbert, e sono il prodotto tensoriale dei primi due.

Per convincersi di ciò dapprima si può pensare alla situazione menzionata prima, in cui i due momenti "addendi" sono i momenti relativi a parti di un sistema, e il momento "somma" è il momento totale.

(i tre capoversi che seguono sono opera mia, quindi non sono sicuro)
Per aggiungere più rigore, ricordiamo che se i due momenti angolari addendi sono compatibili (come richiesto) vuol dire che sono due quantità misurabili senza che la misura di una influenzi l'altra.
Se passiamo dai momenti angolari alle rotazioni di cui sono generatori infinitesimali, questo significa che, viste come trasformazioni dello spazio delle configurazioni del sistema, la rotazione totale è la somma (cioè la composizione) di due distinte rotazioni (ad esempio di due parti del sistema, o di una rotazione 'spaziale' e una 'di spin').
Passando poi dalle trasformazioni (rotazioni) agli operatori unitari che le rappresentano, si ha che l'operatore che rappresenta la rotazione totale è la somma, cioè la composizione, dei due 'addendi'.
Passando dagli operatori unitari ai loro generatori infinitesimali, e utilizzando la nozione di *rappresentazione irriducibile* si arriva al fatto che l'autospazio del momento totale è il prodotto tensoriale degli autospazi dei momenti addendi.
(tutto questo andrebbe rigorizzato, e sopratutto devo chiarire la questione delle rappresentazioni irriducibili)

In formule :

$|j_1, m_1\rangle$ autostato simultaneo di $J_1{}^2$ e J_{1z}

$|j_2, m_2\rangle$ autostato simultaneo di $J_2{}^2$ e J_{2z}

$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1 ; j_2, m_2\rangle$ autostato simultaneo di J^2 e J_z

Degenerazione degli spettri dei momenti "addendi"

Per il momento angolare "addendo" $\vec{J}_1$, fissato il numero quantico j_1, il numero quantico m_{1z} può assumere i $(2\,j_1 + 1)$ valori $\{-j_1, -j_1+1, \ldots, j_1\}$.
I corrispondenti $(2\,j_1 + 1)$ autovettori degeneri di $J_1{}^2$ sono relativi allo stesso autovalore $j_1 (j_1 + 1)\,\hbar^2$ ma sono autovettori distinti di J_{1z} relativi ai $(2\,j_1 + 1)$ autovalori $m_1\,\hbar$, con $m_1 \in \{-j_1, (-j_1+1), \ldots, j_1\}$.
Analogamente per $\vec{J}_2$.

Degenerazione dello spettro del momento risultante

Passando al momento angolare totale, studiamo ora l'autobase di J^2 e J_z.

Ricordiamo che per la componente z vale l'additività : $J_z = J_{1z} + J_{2z}$, e quindi (vedi metodo di separazione delle variabili) gli autovettori di J_z saranno il prodotto tensoriale di quelli di J_{1z} e J_{2z}, mentre gli autovalori saranno la somma : $m = m_1 + m_2$.
Invece per J^2 l'additività non vale : $j \neq j_1 + j_2$.

Ora, utilizzaimo il fatto che l'autospazio del momento risultante è la somma diretta dei due autospazi dei momenti addendi.
Questo implica che ogni autostato comune dei due operatori L^2 e L_z si può scrivere come prodotto tensoriale di due autostati di $L_1{}^2$ e L_{1z} e di $L_2{}^2$ e L_{2z} :

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \; .$$

Sottospazio con j_1 e j_2 fissati

<u>Vogliamo adesso limitarci a studiare l'autospazio generato dagli autovettori che abbiano un valore fissato di j_1 j_2 e tutti i valori possibili di</u> m_1 e m_2.
In formule, vogliamo studiare il sottospazio generato dalla base

$$\left\{ |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \right\}_{m_1 = -j_1 \,;\; m_2 = -j_2}^{j_1 \,;\; j_2} \; .$$

Poiché j_1 e j_2 sono fissati, possiamo adottare la notazione compatta

$$\left\{ \left| m_1 , m_2 \right\rangle \right\}_{m_1 = -j_1 \,;\, m_2 = -j_2}^{j_1 \,;\, j_2} .$$

Si tratta di un insieme di autovettori comuni di J^2 e J_z.
Poiché m_1 può assumere i $(2 j_1 + 1)$ valori che vanno da $-j_1$ a j_1 e m_2 può assumere i $(2 j_2 + 1)$ valori che vanno da $-j_2$ a j_2, l'autospazio in questione ha dimensione $(2 j_1 + 1) (2 j_2 + 1)$.

Degenerazione dell'autovalore m

Consideriamo un certo autovalore $m \hbar$ di J_z.
Abbiamo già detto che poiché per J_z vale l'additività si ha che $m = m_1 + m_2$.

Dunque l'operatore J_z è degenere, perché in generale diverse coppie di autovalori di J_{z1} e J_{z2} cioè diverse coppie di valori di m_1 e m_2 danno luogo allo stesso (auto)valore $m = m_1 + m_2$.

Valutiamo questa degenerazione, cioè chiamiamo W_m il sottospazio generato da tutti gli autovettori $|m_1 , m_2>$ con $m_1 + m_2 = m$ e calcoliamone la dimensione.

La degenerazione non c'è quando entrambi i valori m_1 e m_2 assumono il valore massimo, perché esiste una sola possibile scelta dei valori di m_1 e m_2, e cioè $m_1 = j_1$ e $m_2 = j_2$ e quindi $m = m_1 + m_2 = j_1 + j_2$.
In altre parole, nell'autospazio con j_1 e j_2 fissati, esiste un unico autovettore di J_z relativo all'autovalore massimo $m = j_1 + j_2$.

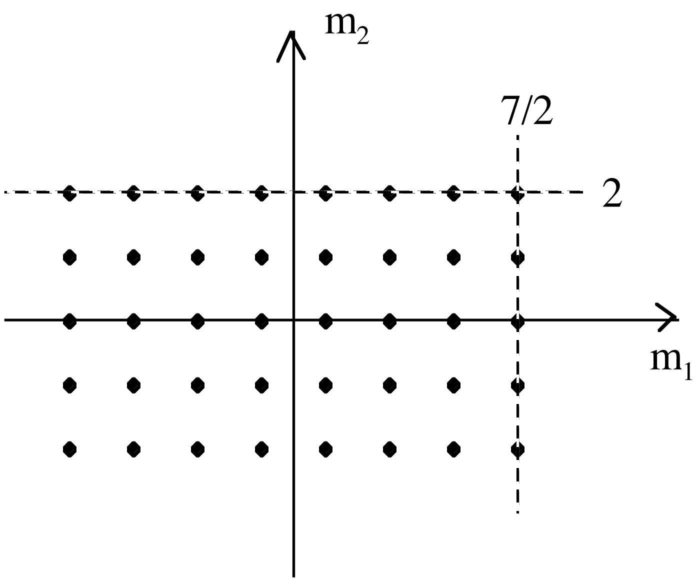
L'autospazio W_m di J_z relativo all'autovalore $m = j_1 + j_2 - 1$ ha dimensione 2, perché è generato dai due autovettori ortogonali $|j_1 -1 , j_2>$ e $|j_1 , j_2 -1>$.

Approccio grafico

Per andare avanti in questo conto è utile un approccio grafico.

Consideriamo un piano cartesiano, il cui asse delle ascisse rappresenti i valori di m_1 e quello delle ordinate i valori di m_2.

Se tracciamo i punti relativi a tutte le coppie di valori possibili di m_1 e m_2 con j_1 e j_2 fissati otteniamo un reticolo di passo unitario. Questo reticolo è finito, ed è un rettangolo di dimensioni $(2 j_1 + 1) \times (2 j_2 + 1)$, in quanto m_1 e m_2 possono assumere i valori $[-j_1 , j_1]$ e $[-j_2 , j_2]$ rispettivamente. Vediamo un esempio per $j_1 = 7/2$ e $j_2 = 2$



Notiamo che j_1 è semidispari, e quindi il valore $m_1 = 0$ non è permesso, mentre j_2 è intero, e quindi il valore $m_2 = 0$ è permesso.

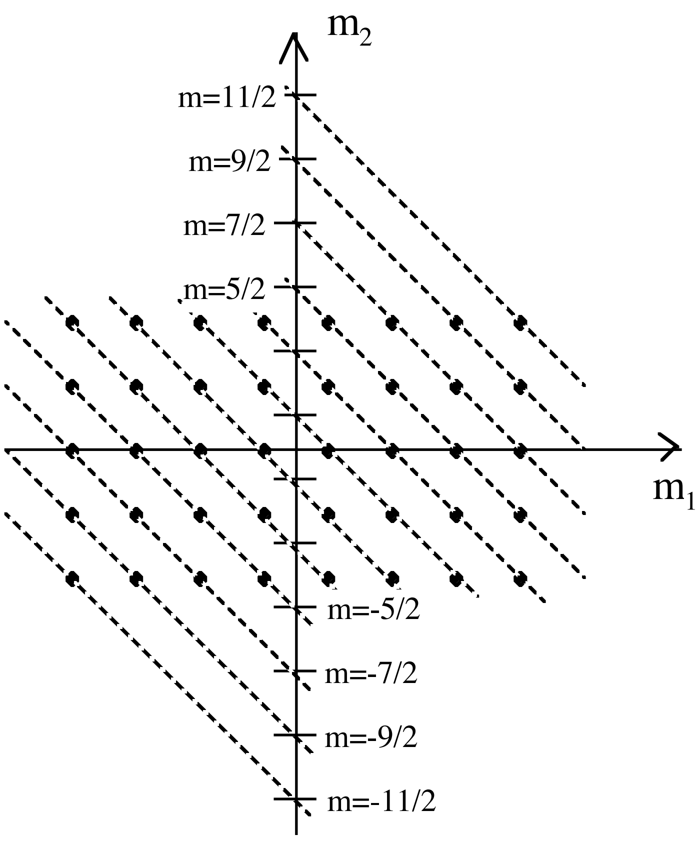
In questo piano,vogliamo individuare quante coppie di valori permessi di m_1 e m_2 hanno un certo valore della somma m, basta vedere quanti punti soddisfano l'equazione

$$m_1 + m_2 = m$$

che in forma esplicita diventa

$$m_2 = -m_1 + m$$

e che è rappresentata da una retta inclinata verso sinistra a 45° (coefficiente angolare -1) e che interseca l'asse delle ordinate in m (ordinata all'origine) :



(ho omesso i valori intermedi di m per non coprire il grafico).

Dunque vediamo che il comportamento della degenerazione è il seguente : quando m ha il valore massimo $j_1 + j_2$ la degenerazione non c'è. Poi man mano che m diminuisce di un'unità alla volta, la degenerazione aumenta di un'unità alla volta, fino a diventare massima per $m=|j_1 - j_2|$. In particolare in questo caso la degenerazione vale $(2\, j_< + 1)$ dove abbiamo posto
$j_< = \min(j_1, j_2)$.

Diminuendo ancora m di un'unità alla volta, la degenerazione si mantiene costante su questo valore massimo, fino a quando m raggiunge il valore $-|j_1 - j_2|$. Decrementando ulteriormente il valore di m, sempre un'unità alla volta, la degenerazione comincia a diminuire, fino a quando m assume il valore minimo possibile, e cioè $-j_1 - j_2$, caso in cui la degenerazione si anulla un'altra volta, in quanto anche in questo caso esiste un'unica coppia di valori di m_1 e m_2 la cui somma sia $-j_1 - j_2$.

Riassumendo, per l'autovalore (il numero quantico) m dell'operatore J_z si ha :

$$-j_1 - j_2 \leq m \leq j_1 + j_2.$$

La degenerazione di questo autovalore cresce al decrescere di $|m|$: è nulla per $m = -j_1 - j_2$; cresce di un'unità alla volta man mano che m aumenta, fino ad assumere il valore massimo $[2 \min(j_1, j_2) + 1]$ per $m = -|j_1 - j_2|$; mantiene questo valore massimo fino a quando m raggiunge il valore $m = |j_1 - j_2|$; da qui in poi comincia a decrescere, sempre di un'unità alla volta, fino ad annullarsi quando m raggiunge il valore massimo $m = j_1 + j_2$.

Studiamo adesso che succede all'operatore J^2.

Consideriamo di nuovo il sottospazio, che abbiamo chiamato W_m, generato dagli autovettori comuni a J^2 e J_z con valori j_1 e j_2 fissati, e con valori di m_1 e m_2 tali che $m_1 + m_2 = m$.

Costruiamo adesso gli operatori gradino J_+ e J_- relativi al momento angolare totale :

$$L_+ \equiv L_x + i L_y$$

$$L_- \equiv L_x - i L_y \, .$$

Se applichiamo l'operatore di innalzamento all'autospazio W_m questo diventa l'autospazio W_{m+1}, in quanto per definizione tutti i vettori di W_m sono autovettori di J_z relativi all'autovalore m, e quindi applicando l'operatore di innalzamento diventano autovettori di J_z relativi all'autovalore $m+1$.

D'altra parte abbiamo visto che, per i valori dm tali che

$$|j_1 - j_2| \leq m \leq j_1 + j_2$$

la dimensione di W_{m+1} (degenerazione) è di un'unità più piccola della dimensione di W_m.
Questo significa che tutti i sottospazi W_m con $|j_1 - j_2| \leq m \leq j_1 + j_2$ contengono un'autovettore, chiamiamolo $|\psi>$, che viene trasformato da J_+ nel vettore nullo : $J_+|\psi> = |0>$.

Ma se utilizziamo la relazione :

$$J_- J_+ = J^2 - J_z^{\,2} - J_z = J^2 - J_z(J_z + 1)$$

(vedi)

(abbiamo scelto untià di misura in cui $\hbar=1$)

che discende dalla definizione degli operatori gradino, si ha

$$\| |0\rangle \|^2 = 0 = \| J_+ |\psi\rangle \|^2 = \langle \psi | J_- J_+ | \psi \rangle = \langle \psi | \left[J^2 - J_z(J_z + 1) \right] | \psi \rangle = 0$$

Ora utilizziamo il fatto che $|\psi>$ è autovettore di J_z relativo all'autovalore m :

$$\langle \psi | \left[J^2 - J_z(J_z + 1) \right] | \psi \rangle = \langle \psi | J^2 | \psi \rangle - \langle \psi | J_z(J_z + 1) | \psi \rangle =$$

$$= \langle \psi | J^2 | \psi \rangle - m(m+1) = 0$$

$$\langle \psi | J^2 | \psi \rangle = m(m+1) .$$

Ma, se $|\psi>$ è autovettore di J_z relativo all'autovalore m, è anche autovettore di J^2 relativo ad un certo autovalore $j\,(j + 1)$, tale che $-j \leq m \leq j$.

Allora l'ultima relazione diventa

$$j(j+1) = m(m+1)$$

$$m = j.$$

Quindi abbiamo scoperto che tutti e soli gli autospazi degeneri W_m di J_z individuati dall'autovalore m, e tali che $|j_1 - j_2| \leq m \leq j_1 + j_2$, contengono un autovettore $|\psi>$, che è annichilato dall'operatore J_+.
Abbiamo inoltre dimostrato che questo implica che $|\psi>$ è autovettore di J^2 relativo all'autovalore (numero quantico) j, e che questo numero quantico cioncide con m, cioè
$j = m$.
Poiché per i numeri quantici j e m valgono le solite regole dei momenti angolari, questo significa che tutti gli autovettori dello spazio W_m sono relativi all'autovalore m di J_z, e a diversi autovalori di J^2, e $|\psi>$ è quello tra questi che ha autovalore di J^2 pari a $j=m$.

Condizione su j

Per quanto segue è utile esprimere questo risultato anche da un altro punto di vista.
Solo gli autospazi W_m formati da autovettori di J_z con numero quantico m tale che $|j_1 - j_2| \leq m \leq j_1 + j_2$ contengono un elemento che è anche autovettore di J^2 con numero quantico $j = m$.
Gli altri autospazi W_m con m non compreso tra $|j_1 - j_2|$ e $j_1 + j_2$ non contengono un tale

autovettore.

Questo dimostra che tutti i numeri quantici j relativi a questi autovettori 'speciali' soddisfano alla relazione $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$.

Potrebbero esistere altri numeri quantici j.
Ma possiamo dimostrare che non è così, infatti negli autospazi W_m con m che non sta tra $|j_1 - j_2|$ e $j_1 + j_2$, non esistono vettori annichilati da J_+, e quindi nessuno di questi ha numero quantico $j = m$.
((?)questa cosa non mi convince!)

Allora possiamo concludere che i numeri quantici j devono essere compresi tra $|j_1 - j_2|$ e $j_1 + j_2$.

intero o semidispari
Infine, consideriamo il fatto che sia j_1 che j_2 possono essere interi o semidispari.
Il numero quantico j può assumere, tra gli altri, il valore $j_1 + j_2$, e comunque varia sempre di un'unità alla volta.
Ne consegue che :

se j_1 e j_2 sono entrambi interi, o entrambi semidispari, j è intero

se j_1 e j_2 sono uno intero e l'altro semidispari, j è semidispari.

Si può riassumere questa osservazione dicendo che :

la somma $j + j_1 + j_2$ è sempre un **intero** .

Le due rappresentazioni dell'autobase di J^2 e J_z

In un primo momento abbiamo designato gli autovettori comuni di J^2 e J_z con

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |m_1, m_2\rangle ,$$

il che significa che li stavamo rappresentando nella base ottenuta moltiplicando tensorialmente le autobasi comuni di J_1^2 J_{1z} e J_2^2 J_{2z}.

Tuttavia, considerando il momento angolare totale come un momento angolare a se stante, abbiamo visto che esiste una rappresentazione dell'autobase comune di J^2 e J_z basata sui rispettivi autovalori (numeri quantici) :

$$\{|j, m\rangle\}_{j=0,\, m=-j}^{n-1,\, j}$$

dove j varia da 0 fino ad un valore che dipende dall'energia del sistema (e che abbiamo indicato con $n-1$ pensando all'atomo di idrogeno), e m varia da $-j$ a j.

Questi autovettori sono comunque anche autovettori di J_1^2 e J_2^2, e quindo potremmo anche usare la notazione più pedante

$$\left\{ \left| j_1 , j_2 ; j , m \right\rangle \right\}_{j=0,\, m=-j}^{n-1,\, j}$$

Inoltre abbiamo visto che fissati due valori j_1 e j_2 dei numeri quantici relativi ai moduli quadri dei momenti 'addendi', non è fissato un valore del numero quantico j relativo al modulo quadro del momento totale, ma è fissato un intervallo, e in particolare deve essere :

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2.$$

Questa ultima relazione è detta relazione triangolare.
Poiché per la regola del parallelogramma i due momenti angolari addendi e quello risultante sono tre vettori che formano un tirangolo, questa regola dice semplicemente che la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre minore o uguale alla somma delle lunghezze degli altri due e minore della loro differenza!

Coefficienti di Clabsh - Gordan

Abbiamo dunque visto che esistono due modi per rappresentare gli autovettori comuni di J^2 e J_z.
Si tratta tuttavia di due autobasi ortonormali dello stesso spazio.
Allora possiamo definire una matrice del cambiamento di riferimento.

Gli elementi di questa matrice sono noti come coefficienti di Clabsh - Gordan.

Per definizione essi sono ottenuti come prodotto scalare tra gli autovettori delle due possibili rappresentazioni di autobase comune di J^2 e J_z :

$$\left\langle m_1 , m_2 \right| j , m \rangle$$

oppure

$$\left\langle j_1 , m_1 ; j_2 , m_2 \right| j , m \rangle$$

oppure

$$\left\langle j_1 , m_1 ; j_2 , m_2 \right| j_1 , j_2 ; j , m \rangle$$

avendo usato notazioni via via più complete e pignole.

Esempio : somma di due spin 1/2

(da aggiustare : è stato ‘tagliato’ da ‘lez 2’ di struttura)

vogliamo trovare lo spin (totale) di un sistema costituito da due particelle con spin 1/2, supponendo che il momento angolare orbitale del sistema sia nullo.

Il teorema di addizione dei momenti angolari appena enunciato dice che
lo spin totale che deriva dalla somma dei due spin “1/2”, può assumere autovalori 0 o 1.
Infatti si ha

$$s \in \left[|s_1 - s_2|, s_1 + s_2 \right] = \left\{ \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right|, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\} = \{0, 1\}$$

Lo stato con $s = 1$ è 3 volte degenere, infatti $s_z \in \{-1, 0, 1\}$; mentre lo stato con $s = 0$ è 1 volta degenere (cioè non è degenere), infatti $s_z \in \{0\}$.

In seguito a questi valori della degenerazione, il primo multipletto, formato dagli autostati con $s=1$, si chiama **tripletto**, mentre il multipletto formato da quelli con $s=0$ si chiama singoletto.

Vogliamo ora rappresentare gli autostati dello spin totale in termini degli stati di spin dei singoli elettroni.
Questa rappresentazione pone un problema, che è quello che sta alla base delle difficoltà che ci sono nel sommare insieme una coppia di momenti angolari.
Infatti, se ‘costruisco’ l’operatore $|\vec{S}|^2$ (nota che il modulo è ridondante) ricordando che $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, ricordando che $\left[\vec{S}_1, \vec{S}_2\right] = 0$ in quanto “si riferiscono a gradi di libertà diversi” si ha :

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2 = \vec{S}_1^{\,2} + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2^{\,2} \\ &= \vec{S}_1^{\,2} + 2\left(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}\right) + \vec{S}_2^{\,2} . \end{aligned}$$

Qui compaiono i prodotti di tutt’e tre la coordinate. Ora, i singoli momenti angolari possono essere autostati simultanei del quadrato del momento angolare e della proiezione rispetto a un asse (in genere si sceglie l’asse z). Questi due operatori non commutano con le proiezioni del momento angolare rispetto alle altre due direzioni, S_x e S_y. Quindi $\vec{S}^2$, nella base in cui... io considero gli stati come autostati simultanei di $\vec{S}_1^{\,2}, S_{1z}, \vec{S}_2^{\,2}, S_{2z}$ non è diagonale. Quindi gli autostati simultanei di $\vec{S}^2$ e di S_z non sono.... $\vec{S}^2$ non è diagonale nella base degli autostati simultanei di $\vec{S}_1^{\,2}, S_{1z}, \vec{S}_2^{\,2}, S_{2z}$.
S_z si, ma $\vec{S}^2$ no!

Quindi se io voglio rappresentare gli autostati simultanei di $\vec{S}^2$ e di S_z in termini di autostati di $\vec{S}_1$ e di $\vec{S}_2$ debbo mischiare insieme più autofunzioni di questo tipo.

Esercizio :
Ritrovare le proprietà della somma dei momenti angolari, in maniera diretta, per una coppia di particelle (cfr. Bransden pag 252).

I vettori di base, per la coppia di spin 1/2 sono questi quattro vettori qua :

$$|++\rangle, |--\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle :$$

$\vec{S}_1^{\,2}$ e $\vec{S}_2^{\,2}$ sono dei numeri perché valgono tutt'e due $\frac{3}{4}\hbar^2$. Ciò che distingue gli stati sono i valori di S_{1z} e S_{2z} . I casi sono 4 : (S_{1z} = 1/2 , S_{2z} = 1/2) ; (S_{1z} = -1/2 , S_{2z} = -1/2) ; (S_{1z} = 1/2 , S_{2z} = -1/2) ; (S_{1z} = -1/2 , S_{2z} = 1/2).
Quindi, lo spazio degli stati di due spin 1/2 è uno spazio di dimensione 4, i cui vettori di base sono questi quattro, che abbiamo scritto con notazione sintetica.

Fare 'direttamente' la somma dei momenti angolari significa : io voglio vedere come sono fatti gli autostati di $\vec{S}^2$, allora posso rappresentare quest'operatore in questa base di questi quattro stati.
Poco sopra abbiamo visto l'espressione esplicita di $\vec{S}^2$ in funzione degli operatori di singola particella :

$$\vec{S}^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2 = \vec{S}_1^{\,2} + 2\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 + \vec{S}_2^{\,2}$$
$$= \vec{S}_1^{\,2} + 2\left(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}\right) + \vec{S}_2^{\,2}$$

Tuttavia qui ci serve di eliminare la dipendenza da S_{ix} e S_{iy}, e esprimere tutto con S_{iz}.
Possiamo ottenere questo usando gli operatori gradino:

$$S_+ = S_x + iS_y$$

$$S_- = S_x - iS_y$$

[...]
(qua l'idea è ottenere per calcolo diretto la relazione tra i numeri quantici di spin totale e i numeri quantici di spin di singola particella)
[...]

D'altra parte, per S_z la relazione tra operatore "totale" e operatori di singola particella è più semplice:

$$S_z = S_{1z} + S_{2z}$$

e quindi (cfr. Bransden pag 252):