

# Perturbazione armonica : teoria generale

## Abstract

Questo documento rispecchia buona parte del **capitolo XIII del Cohen**.

Si tratta dapprima la transizione tra due stati dello spettro **discreto** di un non meglio specificato sistema, la cui Hamiltoniana sia nota, e che sia soggetto ad una *perturbazione armonica*.

Come caso particolare si studia il caso di perturbazione costante e il caso in cui la perturbazione è un'onda elettromagnetica, ottenendo espressioni approssimate delle probabilità di transizione.

In particolare, studiando il caso di onda elettromagnetica, utilizziamo i risultati dello studio fatto a parte sull'interazione tra la radiazione elettromagnetica e la materia (vedi file "teoria perturbativa (semiclassica)).

Dapprima studiamo un'onda monocromatica.

In seguito consideriamo il caso più realistico di un pacchetto d'onda, ottenendo un'espressione della probabilità di transizione in funzione dell'intensità dell'onda, che viene utilizzata in seguito per giustificare la teoria fenomenologica di Einstein (vedi).

In seguito si studia il caso di transizione da uno stato dello spettro **discreto** ad uno stato dello spettro **continuo**.

Nell'ambito di questo secondo caso (transizione discreto -> continuo) si studia dapprima il caso di perturbazione costante, ottiene e poi, con un piccolo 'ritocco' il caso di perturbazione armonica.

### • Transizione discreto -> discreto •

Studiamo dapprima in generale il caso di una perturbazione, dipendente sinusoidalmente (o cosinusoidalmente) dal tempo, che perturba un sistema con Hamiltoniana  $H_0$  il cui spettro (discreto) è noto.

Consideriamo due certi autostati (dello spettro discreto) di  $H_0$ , che definiremo 'iniziale' e 'finale' :

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle$$

$$H_0 |f\rangle = E_f |f\rangle$$

La teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, ci fornisce la **probabilità di transizione** dal primo al secondo stato, quando sul sistema agisca la perturbazione, cioè quando l'Hamiltoniana del sistema è :

$$H(t) = H_0 + W(t)$$

dove, nel caso in esame

$$W(t) = W_0 \cos \omega t.$$

### Probabilità di transizione

La probabilità di transizione (approssimata al prim'ordine) è data in generale da :

$$P_{fi}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i \omega_{fi} t'} W_{fi}(t') dt' \right|^2 \quad (\text{probabilità di transizione})$$

dove

$$\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar} \quad (\text{frequenza di Bohr})$$

$$W_{fi}(t) = \langle f | W(t) | i \rangle \quad (\text{elemento di matrice della perturbazione}).$$

Esplicitando ora la forma cosinusoidale della perturbazione, si ha

$$\begin{aligned} W(t) &= W_0 \cos \omega t \\ &= \frac{W_0}{2} (e^{i \omega t} + e^{-i \omega t}) \end{aligned}$$

e dunque

$$P_{fi}(t) = \frac{|W_{0fi}|^2}{4 \hbar^2} \left| \int_0^t e^{i(\omega_{fi} + \omega)t'} + e^{i(\omega_{fi} - \omega)t'} dt' \right|^2$$

dove

$$W_{0fi} = \langle f | W_0 | i \rangle$$

(elemento di matrice dell'ampiezza massima della perturbazione oscillante) è una costante che non dipende esplicitamente dal tempo.

svolgendo gli integrali si ha

$$\int_0^t e^{i(\omega_{fi} + \omega)t'} dt' = \left[ \frac{e^{i(\omega_{fi} + \omega)t'}}{i(\omega_{fi} + \omega)} \right]_0^t = -i \left[ \frac{e^{i(\omega_{fi} + \omega)t} - 1}{(\omega_{fi} + \omega)} \right]$$

e dunque (notare che a causa del modulo, si può eliminare il fattore i):

$$P_{fi}(t) = \frac{|W_{0fi}|^2}{4 \hbar^2} \left| \frac{e^{i(\omega_{fi} + \omega)t} - 1}{(\omega_{fi} + \omega)} + \frac{e^{i(\omega_{fi} - \omega)t} - 1}{(\omega_{fi} - \omega)} \right|^2$$

(formula con i termini risonante e antirisonante).

Dei termini nel modulo quadro, il primo viene detto *termine antirisonante* e il secondo *termine risonante*.

Sviluppiamo separatamente il termine risonante (quello antirisonante è simile), per arrivare ad una forma più sintetica.

### Conti sul termine risonante

$$\left| \frac{e^{i \left( \frac{\omega}{2} \right) t} - 1}{\left( \frac{\omega}{2} \right)} \right|^2$$

al numeratore metto in evidenza  $e^{i \left( \frac{\omega}{2} \right) t}$

$$\left| e^{i \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2} \frac{[e^{i \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2} - e^{-i \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2}]}{\left( \frac{\omega}{2} \right)} \right|^2$$

inoltre il modulo di un prodotto è il prodotto dei moduli

$$\left| e^{i \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2} \right|^2 \left| \frac{e^{i \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2} - e^{-i \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2}}{\left( \frac{\omega}{2} \right)} \right|^2$$

ma il modulo di un esponenziale è 1, mentre nell'altra espressione al numeratore posso utilizzare le formule di Eulero e scrivere un seno

$$= \left| \frac{2i \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2}{\left( \frac{\omega}{2} \right)} \right|^2 = \left| \frac{i \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2}{\left( \frac{\omega}{2} \right) / 2} \right|^2 =$$

Utilizzando di nuovo il fatto che il modulo di un prodotto è il prodotto dei moduli

$$= |i|^2 \left| \frac{\sin \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2}{\left( \frac{\omega}{2} \right) / 2} \right|^2 =$$

ma il modulo di  $i$  è 1, e dunque in definitiva

$$= \left| \frac{\sin \left( \frac{\omega}{2} \right) t / 2}{\left( \frac{\omega}{2} \right) / 2} \right|^2$$

e notiamo che essendoci il quadrato e trattandosi ormai di una quantità reale si può omettere il modulo. (in alternativa a questi passaggi, si possono utilizzare le formule di duplicazione o di bisezione)

Vedremo in seguito che in opportune circostanze si può trascurare il termine antirisonante e il doppio prodotto (interferenza tra i due termini).

In tali circostanze si ha dunque

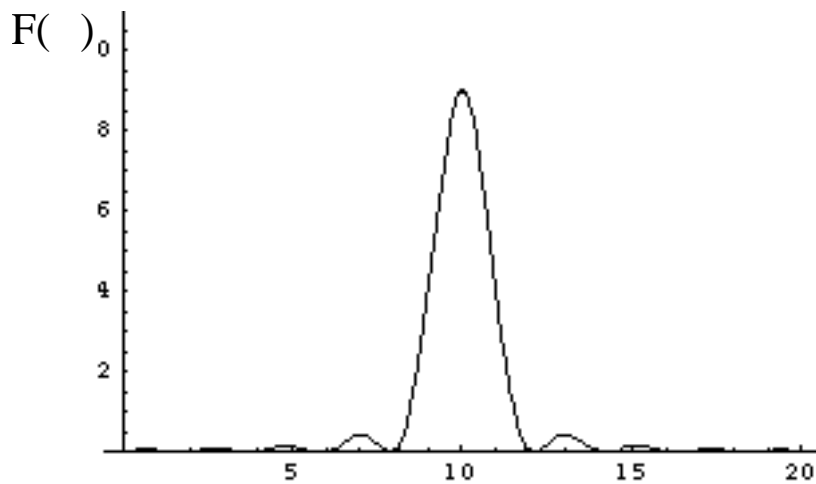
$$P_{fi}(t) = \frac{|W_{0fi}|^2}{4 \hbar^2} F(t, \omega - \omega_{fi}) \quad (\text{probabilità di transizione approssimata})$$

dove

$$F(t, \omega - \omega_{fi}) = \left[ \frac{\sin \left( \frac{\omega - \omega_{fi}}{2} t \right)}{\left( \frac{\omega - \omega_{fi}}{2} \right)} \right]^2 \quad (\text{forma 'compatta' del termine risonante}).$$

### Studio del termine risonante

dunque fissato il tempo, la dipendenza della probabilità di transizione dalla frequenza della perturbazione è regolata dalla funzione  $F$ , che ha la forma tipica del 'diffraction pattern' :



e dunque la probabilità di transizione ha una natura 'risonante'.

La probabilità massima si ha per  $\omega = \omega_{fi}$ , dove vale

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{fi}} \frac{|W_{0fi}|^2}{4 \hbar^2} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\omega - \omega_{fi}}{2} t \right)}{\left( \frac{\omega - \omega_{fi}}{2} \right)} \right]^2 = \frac{|W_{0fi}|^2 t^2}{4 \hbar^2}$$

(abbiamo usato il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t x}{x} = t$ , che si ottiene dividendo e moltiplicando per  $t$  la  $F$ , ottenendo il limite notevole  $\sin x/x$ )

Vediamo ora la larghezza della regione compresa attorno al massimo e tra i primi due minimi.

Considerando l'espressione della probabilità di transizione

$$P_{fi}(t) = \frac{|W_{0fi}|^2}{4 \hbar^2} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\omega - \omega_{fi}}{2} t \right)}{\left( \frac{\omega - \omega_{fi}}{2} \right)} \right]^2$$

i minimi si hanno per

$$\left( f_i - \right) t/2 = k$$

i primi due per

$$\left( f_i - \right) \frac{t}{2} = \pm \quad = f_i \pm 2 \frac{t}{t}$$

(n.b. anche quando l'argomento del seno è zero, il seno si annulla, ma quello è il caso in cui stiamo nel massimo :  
 $= f_i$ )

Dunque la "larghezza del picco" è  $= 4p/t$ .

Possiamo vedere che la probabilità nel secondo massimo è circa il 5% della probabilità che si ha nel massimo centrale (basta prendere l'argomento del seno pari a  $3p/2$ ).

**- Condizioni per approssimare al solo termine risonante [antirisonante] -**

Vediamo come in opportune circostanze la probabilità sia semplicemente proporzionale ad uno solo dei due termini (risonante e antirisonante), potendosi trascurare l'altro e il doppio prodotto ('termine di interferenza').

Queste circostanze riguardano la frequenza della perturbazione e il tempo.

Vediamo che c'è un preciso significato fisico dietro la circostanza di poter trascurare un termine o l'altro (emissione o assorbimento).

**Condizioni sulla frequenza della perturbazione**

Ricordiamo innanzitutto che la frequenza della radiazione è una grandezza sempre positiva.

Studiamo i seguenti due valori notevoli della frequenza della perturbazione :

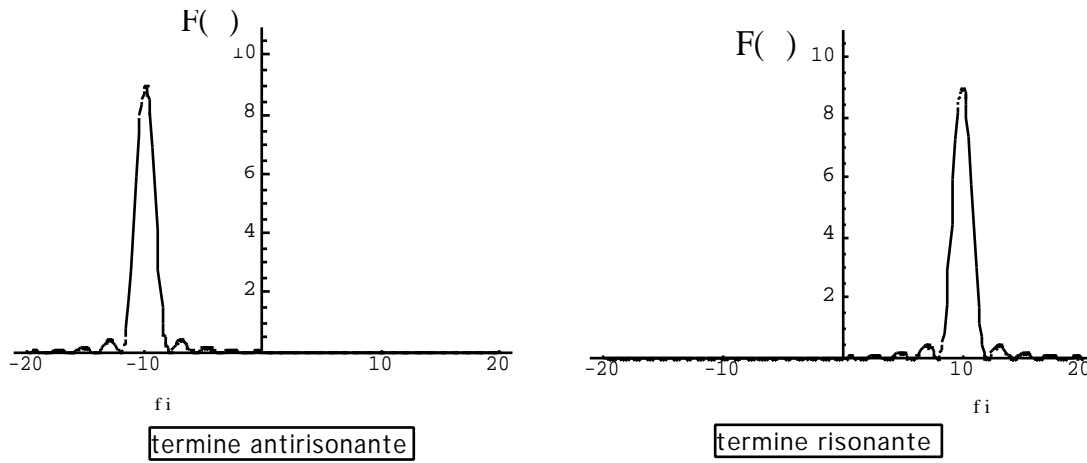
$$W \quad f_i$$

In tal caso, la frequenza di Bohr  $f_i = (E_f - E_i)/\hbar$  è positiva, e significa che l'energia finale è maggiore dell'energia iniziale : stiamo descrivendo un processo di **assorbimento**.

$$- \quad f_i$$

In tal caso, la frequenza di Bohr  $f_i = (E_f - E_i)/\hbar$  è negativa, e significa che l'energia finale è minore dell'energia iniziale : stiamo descrivendo un processo di **emissione**.

Al fine di rappresentare sullo stesso grafico i due termini, possiamo ammettere valori sia positivi che negativi per la frequenza . In tal caso dobbiamo definire la frequenza di Bohr convenzionalmente come sempre positiva (o possiamo prendere il suo modulo). Abbiamo dei grafici del genere :



Rimarchiamo che questa è una forzatura ai soli fini grafici. Infatti non ha significato fisico una frequenza negativa!

Ciò ci porta comunque alla stessa conclusione : il termine antirisonante ha il suo massimo quando  $-|f_i|$  dove i valori sono negativi. Ma frequenza di Bohr negativa vuol dire ‘energia finale minore di quella iniziale’, e dunque si tratta proprio di un processo di emissione.

**nota conclusiva :**

Torniamo a dire che la frequenza  $\omega$  della perturbazione può essere solo positiva. Se tale frequenza assume i valori  $+f_i$  e  $-f_i$  si possono trascurare rispettivamente il termine risonante e quello antirisonante.

D’altra parte, stabiliti i due stati iniziale e finale tra cui si vuole calcolare la probabilità di transizione, i rispettivi autovalori fissano il segno di  $f_i$ .

Dunque questo significa che la frequenza può assumere solo uno dei due valori  $+f_i$  e  $-f_i$  (quello positivo) mentre l’altro è inaccessibile.

La ‘lettura’ di tutto ciò è la seguente :

prima di tutto si stabiliscono i due stati iniziale e finale tra cui si vuole la probabilità di transizione. Questa scelta già ci dice se il processo in questione è di emissione o di assorbimento : se alla fine si ha meno energia, allora è stata emessa, e viceversa.

Come conseguenza di questa scelta, dal punto di vista ‘delle formule’, si ha il solo termine risonante oppure antirisonante, essendo trascurabile l’altro.

Riguardo ai due grafici, ha sempre e solo significato quello a destra (frequenza positiva), ma di volta in volta esso sarà il grafico del termine risonante o di quello antirisonante.

**Condizioni sul tempo**

Ora che abbiamo studiato il comportamento dei termini risonante e antirisonante, possiamo trarre delle conclusioni su come e quando sia possibile considerare la probabilità di transizione costituita solo da uno dei due termini (moltiplicato per un fattore), trascurando l’altro termine e il doppio prodotto (termine di interferenza).

Ciò che stabilisce se posso o meno approssimare la probabilità di transizione è il tempo.

- prima condizione

Abbiamo infatti visto che le zone in cui i termini risonante e antirisonante sono apprezzabilmente non nulli, sono centrate attorno a  $|f_i|$  e  $-|f_i|$  rispettivamente, e l’ampiezza di tali zone è inversamente proporzionale a  $t$

(ricorda che abbiamo calcolato che l’intervallo tra i primi due minimi è  $= 4\pi/t$  vedi)

Dunque affinché le due curve non si sovrappongano imponiamo che le ampiezze siano minori di  $2|f_i|$ , e dunque :

$$t \gg 2 / \omega_i \quad (\text{prima condizione sul tempo}).$$

In tali condizioni si ha che laddove uno dei due termini è non nullo, l'altro è (quasi) nullo e dunque :

- a) posso trascurare il termine (quasi) nullo
- b) il loro (doppio) prodotto è sempre (quasi) nullo.

Indipendentemente dal poter trascurare o meno uno dei due termini, occorre un'altra condizione sul tempo :

- seconda condizione

Se il tempo cresce indefinitamente, la probabilità di transizione diventa maggiore dell'unità, perdendo di significato. Questo si spiega col fatto che stiamo utilizzando un'espressione approssimata per la probabilità (teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo *troncata al prim'ordine*) che evidentemente perde di validità per  $t$  troppo grandi.

Dobbiamo dunque imporre a  $t$  di essere tale che almeno il massimo della probabilità sia minore di 1. Poiché tale probabilità massima è  $|W_{0fi}|^2 t^2 / 4 \hbar^2$  (vedi la seconda condizione da imporre al tempo è :

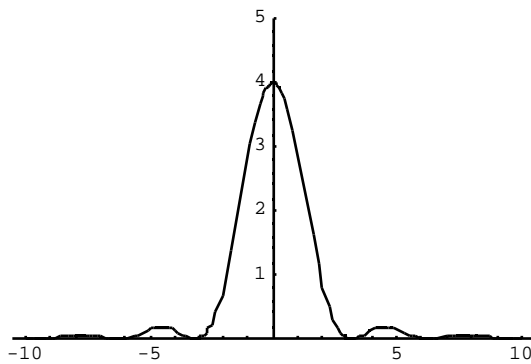
$$t \ll \frac{|W_{0fi}|}{2 \hbar} \quad (\text{seconda condizione sul tempo}).$$

Riassumendo, le condizioni sul tempo da richiedere sono

$$\frac{|W_{0fi}|}{2 \hbar} \gg t \gg \frac{2}{\omega_i}$$

(condizioni sul tempo).

**Ultima considerazione** : se facciamo un grafico della probabilità in funzione della frequenza di Bohr abbiamo



e ciò ci dice che la probabilità di transizione massima si ha tra stati che hanno la stessa energia. Ma è scorretto da qui passare ad un principio di conservazione dell'energia (c'è una probabilità di transizione apprezzabile anche se l'energia finale è (un pò) diversa).

**\* Caso particolare : perturbazione costante**

come caso particolare della perturbazione armonica, possiamo considerare il caso di perturbazione costante,

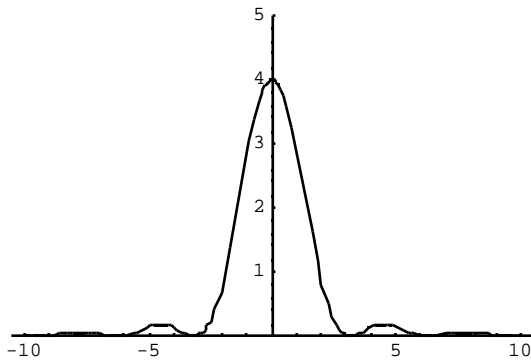
semplicemente ponendo  $\omega = 0$  nella formula

$$P_{if}(t) = \frac{|W_{0fi}|^2}{4\hbar^2} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{fi^+})t}}{(\omega_{fi^+})} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fi^-})t}}{(\omega_{fi^-})} \right|^2 \quad (\text{vedi}).$$

In questo caso i due termini che prima erano detti risonante ed antirisonante sono uguali. Sviluppando i calcoli in maniera analoga a quanto fatto per la perturbazione oscillante si ha :

$$P_{fi}(t) = \frac{|W_{0fi}|^2}{4\hbar^2} \left[ \frac{\sin \omega_{fi} t/2}{\omega_{fi} t/2} \right]^2.$$

Il grafico di questa funzione è :



Questo andamento ci dice che nel caso di perturbazione costante **le uniche transizioni che possono avvenire** (o, più correttamente, quelle che hanno una probabilità di gran lunga maggiore delle altre) **sono quelle tra stati con la stessa energia** (stati degeneri in energia).

• **Transizione discreto -> continuo** •

Anche in questo caso vogliamo ottenere un'espressione della probabilità di transizione da un certo stato iniziale ad un altro. Questa volta però lo stato finale apparterrà allo spettro continuo.

**Probabilità di transizione 'esatta'**

Partiamo dalla definizione generale (ed esatta) della probabilità che un sistema, che al tempo  $t=0$  si trovava nello stato  $|i\rangle$ , si trovi al tempo  $t$  nello stato  $|f\rangle$ .

Al tempo  $t$  il sistema si troverà in un certo stato  $|(t)\rangle$ , e se lo stato  $|f\rangle$  è un elemento dello spettro discreto, i postulati della meccanica quantistica dicono che questa probabilità è data da

$$P_{fi} = |\langle f | (t) \rangle|^2.$$

Viceversa, se lo stato finale è un elemento dello spettro continuo, la formula appena scritta fornisce solo una densità di probabilità.

Supponiamo che gli elementi dello spettro continuo di cui  $|f\rangle$  fa parte siano identificati per mezzo di un insieme



di indici continui (tra cui l'energia), che indichiamo con il simbolo  $\mathfrak{a}$ . In tal caso possiamo scrivere  $|\mathfrak{f}\rangle = |\mathfrak{a}\rangle$ . Tornando alla probabilità, in questo caso quella che è definita è la probabilità che il sistema, che al tempo  $t=0$  si trovava nello stato  $|\mathfrak{j}\rangle$ , si trovi al tempo  $t$  in uno stato appartenente all'intervallo  $\mathfrak{a}$ . Tale probabilità è data da un'integrazione del parametro  $\mathfrak{a}$  su quest'intervallo:

$$P = \int |\langle \mathfrak{a} | \psi(t) \rangle|^2 d\mathfrak{a}.$$

A questo punto torna utile effettuare un cambio di coordinate, e scrivere

$$|\mathfrak{a}\rangle = |E, \mathfrak{p}\rangle$$

dove  $\mathfrak{p}$  sono gli eventuali rimanenti parametri e  $E$  è l'energia.

Riguardo all'integrazione, dobbiamo tener conto anche dello jacobiano della trasformazione:

$$d\mathfrak{a} = (d\mathfrak{p}, E) d\mathfrak{p} dE.$$

Lo jacobiano  $(d\mathfrak{p}, E)$ , funzione di  $\mathfrak{p}$  e  $E$ , è detta **densità degli stati finali**.

Dunque la probabilità di transizione è

$$P_{\mathfrak{j}, E} = \int_{\mathfrak{a}} (d\mathfrak{p}, E) |\langle E | \psi(t) \rangle|^2 d\mathfrak{p} dE.$$

Fin'ora quello che abbiamo scritto è "esatto", cioè non abbiamo fatto nessun'approssimazione.

D'altra parte fin'ora abbiamo solo utilizzato la definizione di probabilità data dai postulati della meccanica quantistica, e cioè abbiamo parlato solo del sistema 'imperturbato', di cui è noto lo spettro, e non è invece ancora entrata nel discorso un'eventuale **perturbazione**.

### Probabilità di transizione approssimata : teoria perturbativa

Supponiamo dunque che sul sistema agisca una perturbazione (o che comunque l'Hamiltoniana del sistema si possa dividere in un'Hamiltoniana imperturbata di cui è noto lo spettro e una perturbazione), e utilizziamo i risultati della teoria perturbativa approssimata al prim'ordine che abbiamo sviluppato in precedenza per la transizione discreto->discreto.

Infatti, sebbene il significato delle quantità  $\langle \mathfrak{f} | \psi(t) \rangle$  e  $\langle \mathfrak{j} | \psi(t) \rangle$  cambi un pò, possiamo sviluppare gli stessi conti della teoria delle perturbazioni "al prim'ordine" utilizzata nel primo caso.

### Perturbazione costante

Se supponiamo dapprima che sul sistema agisca una perturbazione costante, possiamo scrivere la seguente espressione approssimata della probabilità di transizione per una singola 'componente' dell'intervallo di stati finali che stiamo considerando:

$$|\langle E | \psi(t) \rangle|^2 \approx \frac{1}{\hbar^2} |\langle E | W | \psi_i \rangle|^2 \left[ \frac{\sin \omega_{fi} t/2}{\omega_{fi} t/2} \right]^2$$

dove questa volta :

$$\omega_{fi} = \frac{E - E_i}{\hbar};$$

$E$  è l'energia dello stato finale, che ora è un parametro continuo;

$W$  è la perturbazione costante;

$\psi_i$  è lo stato iniziale.

Per ottenere la probabilità di transizione dobbiamo dunque integrare sull'energia e su  $\omega$  :

$$P_{i \rightarrow E} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{E-\omega}^{E+\omega} |\langle E | W | \psi_i \rangle|^2 \left[ \frac{\sin \omega_{fi} t/2}{\omega_{fi} t/2} \right]^2 d\omega dE.$$

Possiamo ora utilizzare lo stesso limite che abbiamo utilizzato anche poco fa per il caso 'discreto -> discreto' di onda elettromagnetica (vedi), e cioè :

$$\lim_t \left[ \frac{\sin \omega_{fi} t/2}{\omega_{fi} t/2} \right]^2 = 2\pi \delta(\omega_{fi} - (E - E_i)).$$

Supponiamo inoltre l'intervallo  $d\omega$  tanto piccolo da poter trascurare l'integrazione su  $\omega$ , e sia  $E_f$  il suo valore centrale.

Nell'approssimazione di tempi abbastanza grandi (in modo che valga il limite appena visto) si ha

$$P_{i \rightarrow E}(t) = \frac{2}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle E_f | W | \psi_i \rangle|^2 t dE.$$

Questo, per le proprietà della funzione di Dirac, è vero solo se  $E_i \in E$ , altrimenti la probabilità risulta nulla.

Questo è coerente con quanto visto nel caso discreto -> discreto : in caso di perturbazione costante le uniche transizioni possibili (o con probabilità apprezzabile) sono quelle tra stati degeneri (vedi).

Come ultimo passaggio, poichè questa probabilità dipende dal tempo (in maniera lineare) e dall'intervallo  $dE$ , vogliamo ottenere un'espressione per la probabilità di transizione per unità di tempo e per unità del parametro  $dE$ .

Per ottenere ciò possiamo derivare rispetto al tempo e rispetto a  $E$  :

$$P = \frac{2}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |\langle E_f | W | \psi_i \rangle|^2 \quad (\text{regola aurea di Fermi})$$

questa è nota come **regola aurea di Fermi**, e prevede che la probabilità di transizione sia una quantità che dipende solo dagli stati iniziale e finale.

Notiamo come 'l'informazione' sullo stato finale è contenuta ormai solo in  $E_f$ .

### Perturbazione armonica

Se la perturbazione non è costante, ma armonica :

$$W(t) = W_0 \cos \omega t$$

possiamo comunque utilizzare i risultati appena trovati.

Infatti, nel caso di perturbazione armonica abbiamo la seguente espressione approssimata per la probabilità di transizione della singola 'componente' dell'intervallo di stati finali :

$$|\langle E_f | \psi(t) \rangle|^2 \approx \frac{1}{4\hbar^2} |\langle E_f | W | E_i \rangle|^2 \left| \frac{\sin \left( \frac{E_f - E_i}{\hbar} t/2 \right)}{(E_f - E_i)/2} \right|^2.$$

Per la probabilità 'totale' dobbiamo integrare su  $E_f$  e su  $E_i$  :

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{E_i}^{E_f} |\langle E_f | W | E_i \rangle|^2 \left[ \frac{\sin \left( \frac{E_f - E_i}{\hbar} t/2 \right)}{(E_f - E_i)/2} \right]^2 dE_f dE_i.$$

A questo punto dovremmo utilizzare il solito limite della delta di Dirac, solo che questa volta non so come esce (?) :

$$\lim_t \left[ \frac{\sin \left( \frac{E_f - E_i}{\hbar} t/2 \right)}{(E_f - E_i)/2} \right]^2 = 2\hbar t \delta(E_f - E_i) = 2\hbar t \delta \left( \frac{E_f - E_i}{\hbar} \right).$$

Nell'ipotesi  $E_f = E_i + \hbar \omega$ , si ha

$$\frac{E_f - E_i}{\hbar} = \frac{E_i + \hbar \omega - E_i}{\hbar} = \omega$$

e quindi ci ritroviamo nelle stesse condizioni di prima. (?) ma io non mi trovo! se  $E_f = E_i + \hbar \omega$  si ottiene  $W_{fi} = 0$ , e quindi l'argomento del seno e il denominatore non diventano  $W$ , come vorremmo, per ritrovare il caso di perturbazione costante, ma diventa nullo! ?...