LASER

(Light Amplifier of Stimulated Electromagnetic Radiation)

Si tratta di studiare il fenomeno della radiazione elettromagnetica che attraversa la materia.

Lo scopo ultimo è di studiare una situazione in cui la radiazione 'emerge' amplificata rispetto a come è 'entrata'.

Dapprima adotteremo il seguente modello : della radiazione attraversa una cavità in cui è presente un gas di atomi che schematizziamo come insieme di sistemi a due livelli energetici (due stati stazionari) che chiameremo 1 il più basso e 2 il più alto in energia (possiamo pensare come caso concreto che il primo sia lo stato fondamentale e il secondo sia il primo stato eccitato degli atomi del gas).
In altre parole supponiamo che la radiazione interagisca solo con due dei livelli energetici di ogni atomo.

Per descrivere questo sistema useremo il modello di Einstein (vedi).
Dovremo però prima di tutto applicare il modello di Einstein al caso non stazionario, per ricavare l'evoluzione temporale della popolazione dei livelli.
Tuttavia questa è l'unica fase in cui si studia l'evoluzione fuori dall'equilibrio, e in effetti l'esito è 'solo' quello di scoprire che l'evoluzione tende esponenzialmente ad un'andamento stazionario (saturazione).
Dunque ricaviamo l'importante valore della popolazione all'equilibrio del livello eccitato.

A questo punto si fa un importante osservazione sul significato di 'bilancio energetico' della condizione di equilibrio.

In questo modo si può impostare un'equazione che dapprima è sull'evoluzione temporale della densità di energia, ma viene facilmente trasformata in un equazione differenziale per la variazione dell'intensità della radiazione in funzione dello spostamento nella cavità.

In questo modo si può studiare l'amplificazione/attenuazione della radiazione durante la propagazione nella cavità.

Vedremo che se supponiamo che la radiazione interagisce solo con due livelli, in nessun caso la radiazione viene amplificata, cosa che sarà possibile solo facendo interagire con la radiazione tre livelli energetici, anzicché due.

Ipotesi

a) le dimensioni della cavità sono talmente ridotte che l'intensità della radiazione è la stessa in tutti i punti della cavità.

b) supponiamo che la radiazione incidente sia monocromatica, con frequenza pari alla frequenza di Bohr della transizione.

NB : queste ipotesi verranno in un secondo momento rilassate.

Posizioni

Diciamo che il numero totale di atomi è N, e che ci sono N_1 atomi nel livello 1 e N_2 nel livello 2 :

$$2 \;\rule{4cm}{0.4pt}\; N_2$$

$$1 \;\rule{4cm}{0.4pt}\; N_1 .$$

Indichiamo con ρ la **densità di energia** del campo elettromagnetico.

Ricordiamo che si ha

$$c\rho = I\, n$$ (relazione tra densità di energia e intensità)

dove c è la velocità della luce e n è il coefficiente di rifrazione del mezzo e I è l'intensità dell'onda.

Quando si parlerà di equilibrio si intenderà che tra la radiazione e il gas di atomi si è raggiunto un equilibrio termodinamico (cioé energetico).

• Popolazione dei livelli

Vogliamo conoscere l'andamento nel tempo del numero di atomi nel livello eccitato.
Utilizzando il modello di Einstein si ha

$$\frac{d\, N_2(t)}{d\, t} = -A_{21}\, N_2(t) - B_{21}\, \rho(\omega_{12})\, N_2(t) + B_{12}\, \rho(\omega_{21})\, N_1(t)$$

(nota : questo è un bilancio della popolazione in 2. Infatti c'è il numero di atomi 'uscenti' da 2, col segno '-' (che vanno in 1), e il numero di quelli 'entranti' (provenienti da 1), col segno '+').

Per semplificare questa equazione notiamo che

$$B_{12} = B_{21} = B \qquad \text{e} \qquad \rho(\omega_{21}) = \rho(\omega_{12}) = \rho$$

e dunque

$$\frac{d\, N_2(t)}{d\, t} = \left(N_1(t) - N_2(t)\right) B\, \rho - A\, N_2.$$

Ora, sfruttando il fatto che i livelli sono solo due, si ha

$$N_1(t) + N_2(t) = N$$

che è una quantità costante.

Sostituendo otteniamo la seguente equazione differenziale lineare non omogenea in $N_2(t)$:

$$\frac{d\, N_2(t)}{d\, t} = \left\{\left[N - N_2(t)\right] - N_2(t)\right\} B\, \rho - A\, N_2(t)$$

$$\frac{d\, N_2(t)}{d\, t} = -\left(A + 2\, B\, \rho\right) N_2(t) + B\, \rho\, N$$ (equazione per la popolazione del livello 2)

Si tratta di un'equazione differenziale del prim'ordine, non omogenea.

La soluzione (nota a meno di una costante moltiplicativa) dell'omogenea associata è :

$$C\, e^{-(A + 2B\rho)t}$$

a questa dobbiamo sommare una soluzione dell'inomogenea.
Proviamo a vedere se per caso una soluzione dell'inomogenea è una costante.
In altri termini supponiamo che nell'insieme delle soluzioni dell'inomogenea ci sia una funzione costante. Poiché me ne basta una, se una funzione costante è soluzione, uso questa.

L'equazione inomogenea, supponendo che la soluzione sia una costante, è :

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 = -N_2\,(A + 2B\rho) + NB\rho$$

in effetti questa equazione nell'incognita $N_2(t)$ ha la soluzione costante

$$N_2(t) = \frac{NB\rho}{A + 2B\rho}$$

e dunque sommando questa soluzione particolare dell'inomogenea a quella trovata per l'omogenea associata otteniamo la soluzione generale dell'inomogenea.

$$N_2(t) = C\, e^{-(A + 2B\rho)t} + \frac{NB\rho}{A + 2B\rho}.$$

Per determinare la costante C imponiamo come condizione iniziale il fatto che all'istante iniziale gli atomi stiano tutti nello stato 1 (stato fondamentale), e cioè che :

$$N_2(0) = 0$$

e poiché per $t=0$ l'esponenziale vale 1, deve essere

$$C + \frac{NB\rho}{A + 2B\rho} = 0$$

e dunque l'andamento nel tempo del numero di atomi nello stato 2 è dato da :

$$N_2(t) = -\frac{NB\rho}{A + 2B\rho}\, e^{-(A + 2B\rho)t} + \frac{NB\rho}{A + 2B\rho}$$

cioè

$$\boxed{N_2(t) = \frac{N B \rho}{A + 2 B \rho} \left(1 - e^{-(A + 2 B \rho) t}\right)}$$ (popolazione livello eccitato).

Vediamo il comportamento di questa funzione.

Studio dell'andamento nel tempo della popolazione

Vediamo il comportamento agli estremi.

- per tempi brevi, più precisamente per $t << 1/(A+2B\rho)$ $\quad$ $(A+2B\rho)\, t << 1$, possiamo sviluppare in serie l'esponenziale (infatti in tali ipotesi siamo in un intorno dell'origine (l'argomento è 'piccolo')), e approssimarlo al prim'ordine (non all'ordine zero, perché in tal caso la funzione diverrebbe nulla) :

$$N_2(t) \approx \frac{N B \rho}{A + 2 B \rho} \left[1 - 1 + (A + 2 B \rho)\, t\right]$$

$$N_2(t) \approx N B \rho\, t$$

quello che ha più interesse fisico è la frazione di atomi eccitati rispetto al numero totale, ossia la 'popolazione relativa' che è :

$$\frac{N_2(t)}{N} \approx B \rho\, t$$ (popolazione relativa per tempi brevi).

Tale quantità dunque <u>dipende linearmente dal tempo</u>.

- per tempi lunghi, più precisamente per $t \to \infty$ si ha che l'esponenziale (il cui argomento è negativo) va a zero, e dunque N_2 tende ad un valore costante :

$$\frac{N_2(t)}{N} \approx \frac{B \rho}{A + 2 B \rho}$$ (popolazione relativa all'equilibrio (saturazione)).

Il fatto che questa frazione tende ad un valore costante è detto **fenomeno della saturazione.**
Il valore asintotico a cui tende la frazione, una volta raggiunto l'equilibrio (valore di saturazione) dipende dall'intensità della radiazione.

Calcolo alternativo per la popolazione all'equilibrio ($t \to \infty$)

Si può ottenere il valore di saturazione della frazione della popolazione per altra via, e cioè partendo dal fatto che all'equilibrio (saturazione) il numero di atomi nel livello 2 è costante.
Utilizzando l'equazione differenziale trovata all'inizio, supponendo di trovarsi all'equilibrio, e che quindi la popolazione del livello non vari, si trova :

$$\frac{d\,N_2(t)}{d\,t} = \left[N - 2\,N_2(t)\right] B\,\rho - A\,N_2(t)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0 = -N_2\,(A + 2\,B\,\rho) + N\,B\,\rho$$

da cui si ricava il valore di saturazione :

$$\frac{N_2}{N} = \frac{B\,\rho}{A + 2\,B\,\rho}.$$

Dipendenza della popolazione all'equilibrio dall'intensità

Ricordiamo innanzitutto che l'intensità della radiazione elettromagnetica è direttamente proporzionale alla densità di energia trasportata :

$$I = \rho\, c/n.$$

Vogliamo studiare il comportamento della popolazione all'equilibrio (saturazione) nei due casi estremi di alta e bassa intensità.

- bassa intensità (e quindi anche bassa densità di energia) ($A >> 2\,B\,\rho$).
Possiamo trascurare il termine $2\,B\,\rho$ al denominatore (questo è vero per esempio per la radiazione di corpo nero, anche se per il momento stiamo facendo l'ipotesi di radiazione monocromatica).
In tal caso si ha

$$\frac{N_2}{N} \approx \frac{B\,\rho}{A}$$

e dunque, all'equilibrio, la frazione di atomi eccitati diventa proporzionale all'intensità della radiazione.

- alta intensità ($A << 2\,B\,\rho$).
Si ha

$$\frac{N_2}{N} \approx \frac{1}{2}$$

e ciò vuol dire che, all'equilibrio, per radiazioni molto intense gli atomi si distribuiscono metà nel livello fondamentale e metà nel livello eccitato.

Ribadiamo che la saturazione, cioè una condizione di equilibrio, si ottiene comunque a patto di aspettare un tempo sufficiente.
L'intensità della radiazione determina il valore di equilibrio della frazione di atomi eccitati.
Al posto dell'intensità possiamo considerare il numero di fotoni per modo, o la densità di energia, che sono tre quantità legate tra loro.

Reinterpretazione della condizione di equilibrio

La popolazione relativa all'equilibrio (saturazione) è

$$\frac{N_2}{N} \approx \frac{B\rho}{A + 2B\rho}.$$

Facendo qualche passaggio :

$$N_2 \left(A + 2B\rho\right) = N B \rho$$

$$N_2 A + 2 N_2 B \rho = \left(N_1 + N_2\right) B \rho$$

$$N_2 A = -2 N_2 B \rho + N_1 B \rho + N_2 B \rho$$

$$N_2 A = \left(N_1 - N_2\right) B \rho$$

L'esprimere la condizione di saturazione in questa forma è molto espressivo in quanto i due membri di quest'uguaglianza hanno un'interpretazione fisica che ora illustriamo.

Il primo termine è il numero di transizioni dal livello 2 al livello 1 per unità di tempo (emissione spontanea). A questa quantità si può dare il significato di numero di eventi che tolgono un fotone dal fascio di radiazione incidente (dunque se moltiplicassi ambo i membri dell'equazione per $\hbar\omega$, che è l'energia trasportata da un fotone potrei parlare di energia sottratta al fascio per unità di tempo).
Infatti un'emissione spontanea vuol dire che un atomo ha assorbito un fotone, portandosi dal livello fondamentale al livello eccitato, per poi dar luogo all'emissione spontanea. Ma l'emissione spontanea avviene in una direzione qualunque, e dunque c'è una probabilità bassissima che il fotone sia riemesso spontaneamente nella direzione del fascio incidente.
Dunque possiamo concludere che il numero di emissioni spontanee rappresenta anche il numero di fotoni persi dal fascio.

Il secondo termine ha il significato di energia persa dal fascio a causa dei processi indotti, in quanto è la differenza tra il numero di assorbimenti indotti meno il numero di emissioni indotte (che avvengono nella stessa direzione del fascio incidente, e dunque sono 'recuperate'). Il numero di emissioni indotte non è uguale al numero di assorbimenti indotti, perché il numero di atomi presenti nei due livelli è diverso.

Dunque la condizione di saturazione, cioè la condizione di equilibrio si può interpretare come la condizione in cui l'energia persa per i processi spontanei uguaglia l'energia persa per i processi indotti.
In altre parole, all'equilibrio, i processi indotti restituiscono al fascio meno energia di quanta ne prelevano dal fascio, e questo 'surplus' è smaltito dall'emissione spontanea, che lo riemette, ma l'allontana dal fascio.

E dunque all'equilibrio l'atomo non accumula più energia, ma la sposta semplicemente, andando in pari col bilancio.

• Interruzione del fascio

Se spengo il fascio, i processi indotti vengono meno, e dunque l'equazione differenziale diventa

$$\frac{d\,N_2(t)}{d\,t} = -\,A\,N_2(t)$$

e dunque

$$N_2(t) = N_2(0)\; e^{-A\,t}$$

questo andamento mostra come dopo aver spento il fascio incidente, c'è un processo di decadimento spontaneo, con emissione di fotoni (fluorescenza). Il tempo di decadimento è legato al coefficiente di emissione spontanea A e dunque misurare questo tempo è un metodo sperimentale per valutare tale coefficiente.

• Attenuazione/amplificazione della radiazione

Vogliamo studiare come cambia l'intensità della radiazione mentre si propaga nella cavità, abbandonando cioè l'ipotesi che la cavità sia di dimensioni trascurabili, e quindi che l'intensità della radiazione sia la stessa in tutta la cavità.

Abbandoniamo anche l'ipotesi di radiazione monocromatica, con frequenza pari alla frequenza di Bohr della transizione, e consideriamo invece una certa <u>distribuzione in frequenza</u> della radiazione incidente.

Distribuzione della radiazione

Per rappresentare la distribuzione in frequenza della radiazione utilizziamo la funzione $F(\omega)$, tale che $F(\omega)\,d\omega$ sia la <u>frazione di radiazione con frequenza compresa tra ω e $\omega+d\omega$</u>.

> Abbiamo già parlato della distribuzione in frequenza della radiazione, sia quando (lez.15) dopo aver ottenuto le regole di selezione, abbiamo considerato la radiazione incoerente, sia quando (fine lez. 17) usando il modello di transizione discreto - continuo, abbiamo ricavato la distribuzione spettrale dei fotoni.
> La distribuzione in frequenza della radiazione dovrebbe essere lorentziana, ma poi dovremmo considerare l'allargamento Doppler...

La funzione $F(\omega)$ deve essere normalizzata. Infatti questa è una distribuzione e vogliamo che integrando su tutte le frequenze si ottenga l'intensità totale della radiazione.
La condizione di normalizzazione è dunque :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\; d\omega = 1$$

(condizione di normalizzazione della distribuzione della radiazione).

Tramite la funzione di distribuzione in frequenza della radiazione possiamo esprimere la distribuzione dell'intensità della radiazione (che dipende infatti dalla frequenza) :

$$I(\omega)\; d\omega = I_0\; F(\omega)\; d\omega$$

dove la costante I_0 rappresenta l'intensità totale della radiazione (intensità=energia trasportata dalla radiazione nell'unità di tempo attraverso l'unità di superfice).

In accordo con quanto studiato a proposito della perturbazione armonica di un sistema (vedi termine risonante), i fenomeni di emissione ed assorbimento indotti saranno massimi quando il massimo di questa distribuzione coincide con la frequenza di Bohr della transizione.

Variazione dell'intensità della componente monocromatica attraverso dz

Cerchiamo ora di esprimere la variazione dell'intensità di una certa componente monocromatica della radiazione quando attraversa un tratto dz della cavità.
Supponiamo che la radiazione si propaga nella cavità lungo l'asse z, e indichiamo con a l'area della sezione della cavità perpendicolare alla direzione di propagazione.

L'intensità della componente monocromatica della radiazione che 'entra' è

$$I(\omega)\, d\omega,$$

mentre l'intensità della componente monocromatica della radiazione che 'esce' dal tratto di spessore dz è

$$\left[I(\omega,\vec{r}) + \frac{\partial\, I(\omega,\vec{r})}{\partial\, z}\, dz \right] d\omega.$$

Variazione dell'energia della componente monocromatica rispetto a t e z

Vogliamo valutare questa quantità <u>in condizioni stazionarie</u> (o 'di saturazione').

- prima espressione (basata sulla definizione, e su una descrizione 'classica' della radiazione)

Per definizione la quantità in questione è data da :

$$\frac{\partial\, \rho}{\partial\, t}\, a\, dz\, d\omega.$$

Infatti :

$\rho(\omega)\ d\omega$ è la densità di energia (energia per unità di volume) relativa alla singola componente monocromatica.
Moltiplicando questa quantità per $a\ dz$ otteniamo l'energia trasportata dalla componente monocromatica della radiazione e contenuta nella 'fetta' di cavità di spessore dz e perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.
Essendo l'energia contenuta nella fetta, questa quantità rappresenta anche la variazione di energia trasportata dalla componente dell'onda, tra la posizione della prima faccia e la posizione della seconda faccia della 'fetta'.
In altre parole

$$\rho\ d\omega\, a\, dz$$

rappresenta la variazione di energia della componente dell'onda rispetto alla variabile spaziale z (propagazione).

Derivando rispetto al tempo otteniamo la variazione desiderata (rispetto a t e z).

- seconda espressione (basata sulla condizione di equilibrio, e su una descrizione della radiazione come fascio di fotoni)

Possiamo calcolare questa variazione di energia anche in un altro modo, e cioé utilizzando la relazione che c'è all'equilibrio tra le popolazioni dei due livelli.

Ricordiamo tale condizione di saturazione :

$$N_2\, A\, \hbar\omega = \left(N_1 - N_2 \right) B\, \rho\, \hbar\omega$$

come osservato in precedenza (vedi) **entrambe queste quantità rappresentano la variazione di energia del fascio incidente**.
In particolare si tratta di energia persa dal fascio. Infatti, guardando per esempio il secondo membro (processi indotti), abbiamo il numero di assorbimenti indotti $N_1\ B\ \rho$, che moltiplicato per $\hbar\ \omega$ dà l'energia persa dal fascio, mentre $N_2\ B\ \rho\ \hbar\ \omega$ è l'energia reimmessa nel fascio dalle emissioni indotte.

Tuttavia queste quantità non esprimono ancora quello che interessa a noi, in quanto rappresentano la variazione di energia di tutto il fascio, quando abbia attraversato tutta la cavità.

Per conoscere la variazione di energia di una sola componente monocromatica (radiazione con frequenza compresa tra ω e $\omega+d\omega$) devo moltiplicare per $F(\omega)\ d\omega$, quantità che esprime la frazione di radiazione in questione. Inoltre, i valori N_1 e N_2 esprimono il numero di atomi di tutta la cavità che stanno nel livello 1 e 2 rispettivamente, mentre la quantità che a noi interessa riguarda solo 'la fetta' di cavità di volume $a\ dz$, e dunque, supponendo che la densità del gas sia uniforme, bisogna moltiplicare per $a\ dz\ /\ V$, dove V è il volume di tutta la cavità.

Dunque, possiamo impostare un'equazione uguagliando l'espressione della variazione di energia 'basata sulla definizione' (vedi), con il secondo membro dell'ultima equazione scritta :

$$\frac{\partial\ \rho}{\partial\ t}\ a\ dz\ d\omega = -\left(N_1 - N_2 \right) B\ \rho\ \hbar\omega\, F(\omega)\ d\omega\ \frac{a\ dz}{V}.$$

Notiamo che al secondo membro abbiamo messo un segno negativo alla variazione di energia che abbiamo preso dalla condizione di equilibrio, perché abbiamo visto che si trattava di energia persa, e dunque di una variazione negativa.

Dividendo ambo i membri per $a\ dz\ d\omega$ otteniamo un'equazione differenziale per la densità di energia in funzione del tempo :

$$\frac{\partial\ \rho}{\partial\ t} = \left(N_2 - N_1 \right)\ \hbar\omega\, F(\omega)\ \frac{B\ \rho}{V}$$ (variazione della densità rispetto al tempo).

Possiamo passare dalla variazione della densità di energia rispetto al tempo, alla variazione dell'intensità rispetto a z.

Infatti possiamo scrivere la relazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\, E/dx\, dy\, dz}{d\, t} = \frac{d\, E/dx\, dy\, d\, t}{d\, z} = \frac{d\, I}{d\, z}$$

Questa uguaglianza si ottiene semplicemente pensando alle definizioni di densità di energia e di intensità :

la densità ρ è l'energia contenuta nel volume unitario;
l'intensità I è l'energia che passa nel tempo unitario per la superfice unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione, che abbiamo supposto essere z.
Dunque

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial z}.$$

Notiamo che questa relazione è valida solo in condizioni stazionarie, infatti è basata sull'espressione dell'energia sottratta al fascio, che vale appunto in condizioni stazionarie.

Ricordando infine che la relazione tra la densità di energia e l'intensità dell'onda è

$$\rho = \frac{I\, n}{c}$$

(dove n è l'indice di rifrazione del mezzo) sostituendo questi risultati nell'equazione per la densità di energia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(N_2 - N_1\right) \hbar\omega F(\omega) \frac{B\, \rho}{V}$$

ottenuta poco sopra (vedi) si ha

$$\frac{\partial\, I(z)}{\partial\, z} = \left(N_2 - N_1\right) F(\omega) \frac{B\, \hbar\omega\, n}{V\, c} I(z)$$ (variazione dell'intensità rispetto a z).

Abbiamo dunque ottenuto un'equazione differenziale la cui soluzione è la funzione che esprime come varia l'intensità della radiazione man mano che si propaga nella cavità, interagendo col gas.

Notiamo che quest'equazione è valida soltanto in condizioni di saturazione, in quanto è basata su una condizione di equilibrio, e dunque le quantità N_1 e N_2 che vi compaiono sono i valori delle popolazioni all'equilibrio.

Osservazioni sull'attenuazione/amplificazione

Notiamo qui che il segno della variazione di intensità, cioè il fatto se la radiazione viene amplificata o attenuata attraversando la cavità, dipende dai valori di saturazione (equilibrio) di N_1 e N_2. Se $N_1 > N_2$ la derivata viene negativa, e dunque si ha un'attenuazione. Ma se si riesce ad ottenere la cosiddetta 'inversione di popolazione', cioè se all'equilibrio ci sono più atomi nel livello eccitato che nel livello fondamentale, si ha un amplificazione della radiazione.

Notiamo altresì che se $N_1 = N_2$, condizione che si realizza all'equilibrio se l'intensità della radiazione è molto (infinitamente) grande, si ha che la variazione di intensità è nulla, cioè la radiazione attraversa la cavità senza cambiare intensità.

Intensità in funzione dello spostamento

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale in $I(z)$, e trovare così l'espressione dell'intensità in funzione dello spostamento.
La forma che abbiamo trovato per questa equazione differenziale è un pò più complicata di quanto sembra, poiché N_1-N_2 è una quantità che dipende da I, e dobbiamo dunque esplicitare questa dipendenza.
Dapprima scriviamo

$$N_2 - N_1 = N_2 - N + N_2 = 2 N_2 - N$$

A questo punto utilizziamo il risultato dello studio sulla popolazione dei livelli in condizioni di saturazione (cioè all'equilibrio), ed in particolare l'espressione di N_2 (vedi) ottenendo :

$$N_2 - N_1 = \frac{2 N B \rho}{A + 2 B \rho} - N = \frac{2 N B \rho - N A - 2 N B \rho}{A + 2 B \rho} = -\frac{N A}{A + 2 B \rho}$$

dividendo numeratore e denominatore per A, e ricordando la relazione tra la densità ρ e l'intensità I si ha

$$N_2 - N_1 = -\frac{N}{1 + \frac{2 B I n}{c A}}.$$

A questo punto possiamo sostituire questa espressione nell'equazione differenziale :

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{N}{1 + \frac{2 B I n}{c A}} F(\omega) \frac{B \hbar \omega n}{V c} I$$

$$\left(1 + \frac{2 B I n}{c A}\right) \frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{N F(\omega) B \hbar \omega n}{V c} I$$

e, posto

$$I_c \equiv \frac{A c}{2 B n}$$

$$\boxed{\frac{1}{I(z)}\left(1 + \frac{I(z)}{I_c}\right) \frac{\partial I(z)}{\partial z} = -\frac{N F(\omega) B \hbar \omega n}{V c}}$$

(forma generale dell'equazione per l'intensità in funzione dello spostamento).

Per ottenere una forma più ‘leggibile’ facciamo alcune manipolazioni :

poniamo

$$K \equiv \frac{N\ F(\omega)\ B\ \hbar\omega n}{V c}.$$

Ricordiamo che queste relazioni riguardano la condizione di saturazione (equilibrio), in quanto per arrivare a queste formule abbiamo più volte utilizzato la condizione di equilibrio.

Distinguiamo dunque due casi a seconda che l’intensità (o la densità di energia) della radiazione sia grande (infinita) o piccola.

Notiamo che poichè la transizione spontanea non dipende da tale intensità, mentre le transizioni indotte vi dipendono, possiamo distinguere questi due casi anche parlando di 1) caso in cui i fenomeni spontanei prevalgono su quelli indotti (come per la radiazione ottica o di corpo nero) (bassa intensità, $I << I_c$ e quindi $A >> B\, r$) 2) caso in cui i fenomeni indotti prevalgono su quelli spontanei (bassa intensità, $I >> I_c$ e quindi $A << Br$)

1) bassa intensità

Se $I << I_c$ possiamo trascurare il rapporto I / I_c che compare al primo membro, e dunque l’equazione diventa

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -K I$$

la cui soluzione è del tipo

$$I(z) = I_0\, e^{-Kz} \quad \text{(intensità in funzione di } z\text{)}$$

che ci dice dunque che per radiazioni ‘ordinarie’, cioè non molto intense, la radiazione (all’equilibrio) si attenua esponenzialmente attraversando la cavità.

Dunque in questo caso di bassa intensità, l’intensità della radiazione diminuisce (esponenzialmente) man mano che la radiazione si propaga nella cavità.

2) alta intensità

Se $I >> I_c$ si ha che nell’equazione differenziale per $I(z)$ si può trascurare l’ 1 nella parentesi, ottenendo :

$$\frac{1}{I}\frac{I}{I_c}\frac{\partial I}{\partial z} = -K$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -K I_c.$$

Integrando ambo i membri rispetto a z si ha la soluzione

$$I(z) = I_0 - K I_c \; z.$$

Sostituendo il valore di K e di I_c :

$$I(z) = I_0 - \frac{N \; F(\omega) \; B \; \hbar\omega n}{V c} \; \frac{c A}{2 B n} \; z$$

semplificando e portando l'intensità iniziale al primo membro si ha :

$$\boxed{I(z) - I_0 = - \frac{N A \;\; \hbar\omega}{2} \; \frac{F(\omega)}{V} \; z}$$ (differenza di intensità in funzione di z)

abbiamo l'espressione della variazione di energia in funzione del tratto percorso.

Vediamo che, poiché tutte le quantità che compaiono a destra sono positive, la variazione di intensità è sempre negativa.

Dunque anche in questo caso di alta intensità, l'intensità della radiazione diminuisce man mano che la radiazione si propaga nella cavità.

Commenti

• in entrambi i casi, di bassa o alta intensità, la radiazione viene attenuata propagandosi nella cavità.

• Notiamo che, poiché siamo in condizioni di saturazione e nell'ipotesi di radiazione molto intensa, la quantità $N/2$ è uguale alla popolazione del livello 2, e dunque possiamo scrivere

$$I(z) - I_0 = - \left[N_2 \; A \; \hbar\omega \right] \frac{F(\omega)}{V} \; z$$

dove per considerazioni fatte in precedenza (vedi) la quantità in parentesi rappresenta l'energia persa per unità di volume da tutta la radiazione.

• Introduzione al L.A.S.E.R.
(**L**ight **A**mplifier of **S**timulated **E**lectromagnetic **R**adiation)

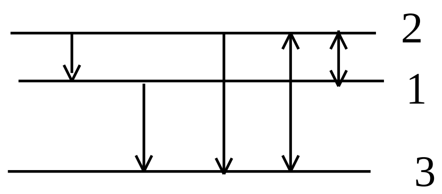
Tornando indietro alla formula

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \left(N_2 - N_1 \right) F(\omega) \; \frac{B \; \hbar\omega n}{V c} \; I$$

questa esprime la proprietà su cui si basa il funzionamento dei laser.
Essa mostra come il segno della variazione di intensità del fascio rispetto al cammino percorso dipende da se la

popolazione del livello più alto in energia è maggiore o minore di quella del livello più basso rispettivamente.
In generale (se non si interviene dall'esterno) si ha $N_2 < N_1$.
Se in qualche modo si riesce ad ottenere il contrario, si parla di *inversione di popolazione.*

Per realizzare l'inversione di popolazione, lavoreremo con tre livelli energetici anzicché due :



(in questa figura le frecce singole rappresentano le transizioni spontanee, che infatti sono solo decadimenti, mentre la frecce doppie rappresentano le transizioni indotte, che infatti possono avvenire nei due sensi)

la radiazione che vogliamo amplificare è quella con frequenza prossima alla frequenza di Bohr dei livelli 1 e 2. La transizione indotta da 3 a 2, detta "**pompa ottica**", serve a popolare il livello 2 e ottenere l'inversione di popolazione nella coppia 1-2.

Bilancio delle popolazioni

Scriviamo ora tre equazioni di 'bilancio di popolazione' usando il modello di Einstein (come fatto all'inizio di questo documento).
Se ci sono solo due livelli, 1 più basso e 2 più alto, abbiamo visto che :

$$\frac{dN_2}{dt} = (N_1 - N_2) B_{12} \rho - N_2 A_{21}$$

dunque nel nostro caso possiamo scrivere :

(1) $$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 A_{21} - N_2 A_{23} + (N_1 - N_2) B_{12} \rho + (N_3 - N_2) B_{23} \rho_p$$

(2) $$\frac{dN_1}{dt} = -N_1 A_{13} + N_2 A_{21} + (N_2 - N_1) B_{12} \rho$$

(3) $$\frac{dN_3}{dt} = N_1 A_{13} + N_2 A_{23} + (N_2 - N_3) B_{23} \rho_p$$

dove ρ e ρ_p sono le densità di energia della radiazione da amplificare e della "pompa ottica" rispettivamente, e i coefficienti di Einstein sono identificati dai pedici.

Tre questioni :

- molteplicità
Se i livelli hanno molteplicità diverse non è più vero che i coefficienti per l'emissione e l'assorbimento indotti sono uguali (cioè ad esempio $B_{12} \neq B_{21}$), e dunque occorrerà utilizzare dei fattori che pesino in

maniera diversa i due coefficienti.

- popolazioni
Notiamo che poiché deve essere

$$N_1 + N_2 + N_3 = N$$

sommando membro a membro le tre equazioni devo ottenere zero. Infatti la somma delle tre derivate è nulla : se alcuni atomi escono da un livello, entrano in un altro. Questo vale sempre, anche lontano dall'equilibrio.

- componenti monocromatiche
Abbiamo parlato di due radiazioni, quella 'da amplificare' e la 'pompa ottica'.
Possiamo sia pensare che queste due sono due componenti monocromatiche di un'unica radiazione che si propaga nella cavità, sia che nella cavità vengono mandate due onde monocromatiche.
In entrambi i casi le due onde/componenti hanno come frequenza le due frequenze di Bohr delle due coppie di livelli 1-2 e 3-2.

Fine delle tre questioni

All'equilibrio (saturazione) i "numeri di occupazione" sono costanti, le derivate sono nulle, e dunque le (1), (2) e (3) costituiscono un sistema di tre equazioni in tre incognite, che è facile risolvere.
Tuttavia le soluzioni che si ottengono hanno una forma difficile da interpretare, e dunque per ottenere una forma più espressiva, introduciamo una definizione e delle approssimazioni.

Definizione

velocità di pompaggio $\equiv$ rapporto tra il numero di atomi che per transizione indotta vengono eccitati dal livello 3 al livello 2 (per unità di tempo), ed il numero totale di atomi.
In altre parole si tratta della frazione di atomi che nell'unità di tempo viene "pompata" da 3 a 2. In formula

$$r \equiv \frac{B_{23}\,\rho_p\,(N_3 - N_2)}{N}.$$

Approssimazioni

Poiché in generale $N_1, N_2 << N_3$, è possibile introdurre le seguenti approssimazioni

$$N_1 \approx N_2 \approx 0$$

$$N_3 \approx N$$

(notiamo che questo non è in contraddizione col fatto che noi vogliamo ottenere un'inversione di popolazione, infatti l'inversione di popolazione che vogliamo ottenere noi è tra i livelli 1 e 2, mentre qui stamo approssimando le differenze tra 1 e 3 e tra 2 e 3).

Con tali approssimazioni si ha

$$\rho \approx B_{2\,3}\,\rho_p \qquad \text{(velocità di pompaggio approssimata)}$$

e dunque in tali ipotesi la velocità di pompaggio è indipendente dalla popolazione dei livelli 3 e 2.

Equazioni per N_1 e N_2

Come conseguenza delle approssimazioni fatte, possiamo scrivere

$$(N_2 - N_3)\, B_{2\,3}\,\rho_p \approx (0 - N)\, r = -N\,\rho$$

e dunque possiamo approssimare questa quantità nella (3). In questo modo, all'equilibrio, la (2) e la (3) diventano un sistema di due equazioni in due incognite :

$$\begin{cases} 0 = -N_1 A_{13} + N_2 A_{21} + \left(N_2 - N_1\right) B_{12}\,\rho \\ 0 = N_1 A_{13} + N_2 A_{23} - r\,N \end{cases}$$

sviluppiamo la prima e ricaviamo N_1

$$-N_1 A_{13} - N_1 B_{12}\,\rho + N_2 A_{21} + N_2 B_{12}\,\rho = 0$$

$$N_1 \left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) = N_2 \left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right)$$

$$N_1 = N_2\,\frac{A_{21} + B_{12}\,\rho}{A_{13} + B_{12}\,\rho}$$

sostituendo nella seconda

$$N_2\,\frac{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) A_{13}}{A_{13} + B_{12}\,\rho} + N_2 A_{23} = r\,N$$

$$N_2 \left(\frac{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) A_{13}}{A_{13} + B_{12}\,\rho} + A_{23}\right) = r\,N$$

$$N_2\,\frac{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) A_{13} + \left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) A_{23}}{A_{13} + B_{12}\,\rho} = r\,N$$

$$\left\| \; N_2 = \frac{\left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) r\,N}{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) A_{13} + \left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) A_{23}} \right.$$

e sostituendo nell'espressione di N_1

$$N_1 = \frac{\left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) r\,N}{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) A_{13} + \left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) A_{23}}\;\frac{A_{21} + B_{12}\,\rho}{A_{13} + B_{12}\,\rho}$$

(si semplifica la parentesi al numeratore della prima col denominatore della seconda)

$$N_1 = \frac{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) r\,N}{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) A_{13} + \left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) A_{23}}$$

e dunque

$$\boxed{N_2 - N_1 = \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r\,N}{\left(A_{21} + B_{12}\,\rho\right) A_{13} + \left(A_{13} + B_{12}\,\rho\right) A_{23}}}$$

che per semplicità nel seguito conviene riscrivere come

$$N_2 - N_1 = \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r\,N}{A_{21}\,A_{13} + A_{13}\,B_{12}\,\rho + A_{13}\,A_{23} + A_{23}\,B_{12}\,\rho}$$

$$N_2 - N_1 = \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r\,N}{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13} + \left(A_{13} + A_{23}\right) B_{12}\,\rho}$$

$$N_2 - N_1 = \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r\,N}{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13}}\;\frac{1}{1 + \dfrac{\left(A_{13} + A_{23}\right) B_{12}\,\rho}{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13}}}$$

e, posto

$$I_c \equiv \frac{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13}}{\left(A_{13} + A_{23}\right) B_{12}}\;\frac{c}{n} \qquad \text{(intensità critica)}$$

$$\boxed{N_2 - N_1 = \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r\,N}{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13}}\;\frac{1}{1 + \dfrac{I}{I_c}}} \qquad \text{(differenza di popolazione tra 2 e 1)}$$

Questa è l’espressione che ci interessa, perché esprime proprio la differenza di popolazione dei due livelli, e ci da informazioni sull’<u>inversione di popolazione</u>.

Come vediamo l'inversione di popolazione ($N_2 > N_1$) avviene se $A_{13} > A_{21}$, e questa è dunque la condizione affinché la radiazione sia amplificata anzicché attenuata propagandosi nella cavità.

Variazione dell'intensità rispetto a z

Possiamo sostituire l'espressione appena trovata di $N_2 - N_1$ nell'equazione differenziale per l'intensità della radiazione in funzione dello spostamento nella cavità.
Nel nostro caso, poiché abbiamo più di due livelli, è bene sottolineare che si tratta dell'intensità della porzione di radiazione che ha frequenza circa uguale alla frequenza di Bohr relativa alla coppia di livelli 1-2.

L'equazione in questione è

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\left(N_1 - N_2\right) F(\omega) \frac{B_{12}\, \hbar \omega n}{V c} I$$

e dunque sostituendo si ha

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r N}{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13}} \frac{1}{1 + \frac{I}{I_c}} F(\omega) \frac{B_{12}\, \hbar \omega n}{V c} I$$

$$\frac{1}{I}\left(1 + \frac{I}{I_c}\right) \frac{\partial I}{\partial z} = \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r N}{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13}} F(\omega) \frac{B_{12}\, \hbar \omega n}{V c}$$

e, ponendo

$$G \equiv \frac{\left(A_{13} - A_{21}\right) r N}{\left(A_{21} + A_{23}\right) A_{13}} F(\omega) \frac{B_{12}\, \hbar \omega n}{V c}$$

l'equazione diventa

$$\boxed{\frac{1}{I(z)}\left(1 + \frac{I(z)}{I_c}\right) \frac{\partial I(z)}{\partial z} = G}$$ (equazione per l'intensità in funzione di z).

A questo punto possiamo integrare questa equazione, tenendo presente che pur'essendo del prim'ordine, è non lineare. Dopo averla integrata in questa forma (ottenendo una soluzione 'complicata' in forma implicita), la integreremo anche in approssimazioni di bassa e alta intensità, ottenendo delle forme più semplici.

Integrazione diretta

Integrando ambo i membri otteniamo facilmente la soluzione

$$\int_0^z \frac{1}{I(z')}\left(1+\frac{I(z')}{I_c}\right)\frac{\partial\, I(z')}{\partial\, z'}\, dz' = \int_0^z G\, dz$$

$$\int_0^z \left(\frac{1}{I(z')} + \frac{1}{I_c}\right)\frac{\partial\, I(z')}{\partial\, z'}\, dz' = G\, z + C$$

$$\int_0^z \frac{1}{I(z')}\frac{\partial\, I(z')}{\partial\, z'}\, dz' + \frac{1}{I_c}\int_0^z \frac{\partial\, I(z')}{\partial\, z'}\, dz' = G\, z + C$$

$$\int_0^z \frac{1}{I(z')}\, d\, I(z') + \frac{1}{I_c}\int_0^z d\, I(z') = G\, z + C$$

dunque possiamo considerare I come variabile di integrazione (cambio di variabile) :

$$\int_0^I \frac{1}{I'}\, dI' + \frac{1}{I_c}\int_0^I dI' = G\, z + C$$

$$\ln I(z) + \frac{I(z)}{I_c} + C = G\, z.$$

Per determinare la costante arbitraria poniamo

$$I(0) = I_0$$

da cui

$$\ln I_0 + \frac{I_0}{I_c} = -C$$

e dunque la soluzione è in generale data in forma implicita dall'espressione

$$\ln \frac{I(z)}{I_0} + \frac{I(z) - I_0}{I_c} = G\, z$$ (intensità in funzione di z (forma implicita)).

Calcolo approssimato

Come preannunciato integriamo l'equazione nelle due approssimazioni in cui l'intensità della radiazione incidente è molto maggiore o molto minore del valore di intensità critica I_c.

- bassa intensità ($I \ll I_c$)

in questo caso nell'equazione per l'intensità si può trascurare il termine I/I_c e dunque l'equazione si può approssimare con

$$\frac{1}{I(z)} \frac{\partial\, I(z)}{\partial\, z} = G$$

$$\frac{\partial\, I(z)}{\partial\, z} = G\, I(z)$$

la cui soluzione è

$$I(z) = I_0\, e^{G\, z} \qquad (I(z) \text{ per basse intensità})$$

e dunque l'intensità della radiazione varia <u>esponenzialmente</u> con l'avanzare nella cavità.

- alta intensità ($I >> I_c$)

In questo caso nella parentesi dell'equazione per l'intensità in funzione di z si può trascurare il termine 1 e dunque l'equazione si può approssimare con

$$\frac{1}{I_c} \frac{\partial\, I(z)}{\partial\, z} = G$$

la cui soluzione è

$$I(z) = I_0 + G\, I_c\, z \qquad (I(z) \text{ per alte intensità})$$

e dunque l'intensità della radiazione aumenta con legge di potenza (linearmente) con l'avanzare nella cavità.

Conclusione

E' per intensità minori dell'intensità critica che 'funziona' il laser.
Infatti, posto che sia realizzata l'inversione di popolazione, cioè che G sia positivo, e cioè che $A_{1\,3} > A_{2\,1}$, anche se in entrambi i casi abbiamo un'amplificazione, per intensità maggiori dell'intensità critica l'amplificazione è solo lineare rispetto a z, mentre per intensità minori, l'intensità viene amplificata esponenzialmente al propagarsi della radiazione nella cavità.