

# laser

- **Introduzione**  
(lez 17, 1h 4' 20")

Note storiche :

la prima idea dell'inversione di popolazione e dell'emissione stimolata fu di Townes, e di Basov, nel '54

La prima realizzazione di un maser fu stesso del '54



(MASER)



**Charles H. Townes**



**Arthur L. Shawlow**

le prime idee teoriche

- concetti base

Una sorgente classica (lampada) emette su tante frequenze e in diverse direzioni.

Con un filtro in frequenza si può filtrare una radiazione policromatica.

Inoltre, con uno schermo forato si può ottenere un fascio di fotoni con direzione molto simile (coerenza spaziale) e monocromatici (coerenza temporale).

In questo modo si perde molta potenza. Inoltre il grado di coerenza sia spaziale che temporale non è elevato.

Una sorgente laser ha un elevato grado di coerenza sia spaziale che temporale.

(1h 16, 11", pag 314)

Elementi fondamentali di un laser (vedi figura pag 314) :

mezzo attivo

cavità (due specchi)

pompa (per fornire l'energia per l'inversione di popolazione).

Consideriamo una porzione di radiazione che fa un percorso di andata e ritorno.

La legge di Lambert Beer ci dice che l'assorbimento per della radiazione di frequenza  $\nu$  che attraversa uno spessore  $z$  è :

$$I(\nu, z) = I(\nu, 0) e^{-\alpha(\nu)z}$$

Abbiamo visto che il coefficiente di assorbimento  $\alpha$ , nel caso di un gas di atomi che assorbono solo con una certa transizione, si può scrivere in funzione delle popolazioni dei due livelli e di una certa 'sezione d'urto' (vedi) :

$$\alpha(\nu) = \frac{N_1}{N_2} \frac{g_1}{g_2} \sigma(\nu)$$

Vediamo che se si ha un'inversione di popolazione il coefficiente di assorbimento diventa negativo, e dunque l'assorbimento diventa un'amplificazione!

Per valutare quest'amplificazione definiamo il guadagno, come rapporto tra le intensità prima e dopo il passaggio nel mezzo attivo. Considerando un percorso di andata e ritorno e un mezzo attivo di lunghezza  $L$  abbiamo

$$G(\nu) \equiv \frac{I(\nu, 2L)}{I(\nu, 0)}$$

$$G(\nu) = \frac{I(\nu, 0) e^{\alpha(\nu)L}}{I(\nu, 0)}$$

$$G(\omega) = e^{\alpha(\omega)L}$$

In un laser, oltre al guadagno ci sono anche delle perdite.

Le cause delle perdite sono : la riflettività finita degli specchi, l'assorbimento della finestra (se il mezzo è gassoso, e racchiuso in una cella), la diffrazione (la cavità è aperta).

Possiamo descrivere tutte le perdite con un termine globale

$$I_0 e^{-\alpha L}$$

In definitiva un passaggio di andata e ritorno si può descrivere con il termine di guadagno per il termine di perdita :

$$I(\omega, 2L) = I(\omega, 0) e^{\alpha(\omega)L - \alpha L}$$

Affinché si abbia amplificazione il guadagno deve superare le perdite :

$$\alpha(\omega)L > \alpha L$$

$$2 \left[ \frac{g_1}{g_2} N_2 - N_1 \right] \alpha(\omega)L > \alpha L$$

$$\left[ \frac{g_1}{g_2} N_2 - N_1 \right] > N_{soglia} \equiv \frac{1}{2 \alpha L}$$

troviamo dunque una soglia minima per l'inversione di popolazione affinché il guadagno superi le perdite e si possa avere la radiazione laser.

Dunque, il laser è un 'oggetto a soglia', cioè un 'oggetto fortemente non lineare', almeno in quanto a andamento della potenza emessa rispetto alla potenza di pompa.

- **Classificazioni**

mezzo attivo :

solido (rubino, neodimio, etc)

liquido (coloranti)

gas (He-Ne, CO<sub>2</sub>, etc)

‘esotici’ (laser a elettroni liberi : FEL (free electron lasers))

Cavità E.M. :

stabile / instabile

singolo modo / multimodo

stazionaria / ad anello

Pompaggio ottico :

lampade (rubino, Nd, etc)

scariche elettriche (He-Ne, CO<sub>2</sub>, etc)

reazioni chimiche (HF)

corrente (laser a diodo)

laser

altro...

- **Pompaggio ottico**

Esistono laser a tre o a quattro livelli (vedi figura a pag 322)

osservazione : in un laser a gas non è conveniente usare una lampada per il pompaggio ottico.

Infatti la transizione che deve eccitare la pompa è tra due livelli atomici, e dunque serve una ben precisa frequenza, mentre la lampada ha in genere uno spettro di emissione molto largo, e dunque è in proporzione piccola la parte di potenza effettivamente impiegata per eccitare la transizione.

Invece per un mezzo attivo solido la lampada può andare bene, perché anziché dei livelli, nei solidi abbiamo delle bande.

Per valutare l'efficienza del pompaggio, nel caso di pompaggio ottico, definiamo l'efficienza di pompaggio, come la quantità :

$$\eta_p = \frac{P_m}{P}$$

dove  $P_m$  è la potenza della pompa che effettivamente viene utilizzata per eccitare il livello, e  $P$  è la potenza della pompa che arriva sul mezzo attivo.

Si ha :

$$P_m = \frac{dN_2}{dt} \cdot V \cdot h\nu_p$$

dove il primo fattore è il rate con cui si popola il livello eccitato dalla pompa,  $V$  è il volume del mezzo attivo, e  $h\nu_p$  è l'energia del singolo fotone della pompa.

Se  $w_p$  è il 'rate di pompa' cioè il numero di atomi per unità di tempo che vengono eccitati dalla pompa, possiamo scrivere :

$$\frac{dN_2}{dt} = w_p N_1$$

e quindi

$$P_m = w_p N_1 V h\nu_p.$$

a causa di disuniformità del mezzo attivo è opportuno parlare di medie spaziali :

$$\langle P_m \rangle = \langle w_p \rangle N_1 V h\nu_p$$

e quindi in definitiva :

$$\eta_p = \frac{\langle w_p \rangle N_1 V h\nu_p}{P} \quad (\text{efficienza di pompaggio}).$$

- studio dettagliato dell'efficienza di pompaggio

a) efficienza di emissione della lampada

$$\eta_r = \frac{\text{potenza ottica prodotta dalla lampada}}{\text{potenza elettrica di alimentazione della lampada}}$$

b) efficienza di trasferimento

la potenza ottica della pompa deve essere 'portata sul campione', e spesso questo passa per un sistema di focalizzazione, che ha le sue perdite

c) efficienza spettrale

solo una parte della radiazione della pompa che incide sul mezzo attivo viene effettivamente assorbita

d) efficienza quantica

rapporto tra gli atomi che assorbono effettivamente la radiazione di pompa e si portano nel 'livello 3', e numero di atomi che decadono dal livello 3 al livello 2 emettendo la radiazione laser.

I motivi per cui questi due numeri non sono uguali possono essere :

gli atomi dal livello 3 possono decadere direttamente nel livello 1;

inoltre i tre livelli che intervengono nel meccanismo laser non è detto che siano gli unici livelli del sistema che utilizziamo, e dunque le particelle dal 'livello 3' possono andare in un altro livello diverso dal 'livello 2'.

Dunque l'efficienza di pompa è la somma di queste quattro efficienze :

$$\eta_p = \eta_b + \eta_s + \eta_q + \eta_r$$

A pag 324 c'è una tabella degli ordini di grandezza delle varie efficienze, ma in generale si parla di 'qualche percento'.

Vediamo ancora più nel dettaglio le varie efficienze.

- efficienza di trasferimento

Per il pompaggio dei laser a stato solido si usa una lampada.

Per aumentare l'efficienza di trasferimento si può usare il seguente accorgimento. Si usa un mezzo attivo cilindrico e una lampada cilindrica. Si mettono entrambi in una cavità fatta come un 'tubo' a sezione ellittica : si mettono lampada e cilindretto di mezzo attivo (rod) all'interno del tubo, in modo che guardando la sezione trasversale si trovino uno in un fuoco e uno nell'altro fuoco dell'ellisse.

Uno schema ancora più efficiente è quello della doppia ellisse, con un fuoco coincidente, con due lampade e il rod messo nel 'fuoco coincidente'.

A pag 316 ci sono i conti per calcolare l'efficienza quantitativamente.

Si parla di cavità ellittica e cavità biellittica, ma attenzione a non confondere questa cavità con la cavità del laser, che sta trasversalmente a questa, ed è costituita da due specchi.

Tra l'altro vedremo che la cavità 'laser' è aperta per selezionare una radiazione con una direzione di propagazione ben precisa.

Il prof (10' 00", vedi pag 327) accenna a dei grafici delle riflettività di alcune superfici metalliche, con il confronto tra 'superficie levigata' e 'superficie depositata' (crescita epitassiale).

L'alluminio è bianco perché ha una riflettività abbastanza uniforme sullo spettro. Invece l'oro è giallo perché la riflettività sulle alte frequenze è scarsa.

Un altro grafico, nella stessa pagina, illustra l'assorbimento nella lampada stessa, a causa del plasma della lampada.

Ci sono diversi assorbimenti alle diverse lunghezze d'onda, per diverse correnti di alimentazione della lampada.

- efficienza spettrale

Ricordiamo che si tratta del rapporto tra la potenza assorbita dal mezzo attivo e la potenza incidente (cioè quella effettivamente trasferita) :

$$\eta_s = \frac{P_{ass}}{P_{inc}}$$

$$\eta_s = \frac{\int \int \frac{dP_\lambda}{dV} dV d\lambda}{\int I_\lambda S_R d\lambda}$$

Per la potenza incidente abbiamo integrato su tutte le frequenze la potenza emessa dalla lampada  $I_\lambda$ , considerando anche la superficie del mezzo attivo 'illuminata'  $S_R$ .

La potenza assorbita è scritta integrando su tutto il volume del mezzo attivo e su tutte le frequenze la quantità

$$\frac{dP_\lambda}{dV}$$

che è la potenza assorbita dal mezzo attivo, relativa alla lunghezza d'onda  $\lambda$ , per unità di volume del mezzo attivo stesso.

Possiamo riesprimere questa quantità riconsiderando le rate equations. Per il momento per semplicità supponiamo che l'efficienza quantica sia 1, cioè che tutti gli atomi eccitati nel livello 3 decadono nel livello 2.

La variazione della popolazione del livello 3 nell'unità di tempo è :

$$\frac{d N_3}{d t} = w_p N_1$$

dove  $w_p$  è il 'rate di pompa', che si può scrivere come :

$$w_p = \sigma F \quad (\text{rate di pompa})$$

$$w_p = \sigma \frac{I_p}{h \nu}$$

dove  $\sigma$  è la sezione d'urto di assorbimento e  $F$  è il flusso di fotoni, che si può scrivere come l'intensità della pompa diviso l'energia del singolo fotone (il prof per inciso dice che il flusso è il numero di fotoni per unità di tempo e per unità di superficie, mentre la *fluenza* è il numero di fotoni per unità di tempo 'e basta').

Ciò posto, la potenza assorbita per unità di volume la si può scrivere in termini del numero di atomi per unità di volume eccitati nell'unità di tempo, moltiplicato per l'energia scambiata col singolo atomo dal singolo fotone :

$$\frac{d P_\nu}{d V} = \frac{d N_3}{d t} h \nu$$

$$\frac{d P_\nu}{d V} = w_p N_1 h \nu$$

$$\frac{d P_\nu}{d V} = \sigma \frac{I_p}{h \nu} N_1 h \nu$$

$$\frac{d P_\nu}{d V} = \sigma I_p N_1.$$

Sostituendo nell'espressione dell'efficienza spettrale si ha :

$$\eta_s = \frac{N_1 \sigma \nu \sigma I_p dV d\nu}{S_R \int \sigma I_\nu d\nu}$$

In alternativa anziché la sezione d'urto si può usare il coefficiente di assorbimento :



$$\eta_s = \frac{\int \eta(\lambda) I_p(\lambda) dV}{S_R \int I_l(\lambda) d\lambda} \quad \text{- laser -}$$

- efficienza quantica

L'efficienza quantica è definita come il rapporto tra la variazione di popolazione (numero di atomi per unità di volume) del livello 2 e la variazione di popolazione del livello 3 :

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} \eta_q$$

D'altra parte abbiamo detto che

$$\frac{dP_\lambda}{dV} = \frac{dN_3}{dt} h\nu$$

da cui

$$\frac{dN_3}{dt} = \frac{dP_\lambda}{dV} \frac{1}{h\nu}$$

Quindi, se teniamo conto dell'efficienza quantica, a partire dalla potenza assorbita per unità di volume :

$$\frac{dN_3}{dt} h\nu = \frac{dP_\lambda}{dV} = N_1 \int \eta(\lambda) I_p(\lambda) d\lambda$$

possiamo scrivere il numero di transizioni verso il livello 2, che sono quelle che effettivamente producono la radiazione laser :

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} \eta_q(\lambda)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_1 \int \frac{\eta(\lambda) I_p(\lambda)}{h\nu} \eta_q(\lambda) d\lambda$$

e quindi possiamo definire una velocità di pompaggio (o intensità di pompaggio) :

$$\dot{N}_2 = \frac{I_p}{h\nu} \sigma_q(\nu) dN_1$$

da cui :

$$\frac{dN_2}{dt} = \sigma N_1.$$

A pag 330 c'è una figura degli spettri di emissione di una lampada allo xeno.

La seconda figura è lo spettro di assorbimento del Nd-YAG.

Si vede che i picchi di assorbimento stanno circa in corrispondenza dei picchi di emissione.

C'è comunque un sacco di potenza ottica che viene persa, e che oltre tutto va in calore, che si deve poi raffreddare.

Oggi per pompare si usano dei laser a diodo, anziché le lampade.

Esistono laser a diodo a 800 nm, che emettono potenze anche di 10 watt, e per di più di radiazione monocromatica.

Inoltre la radiazione si può facilmente convogliare sul mezzo attivo.

Il prof introduce il concetto di *mode matching* : l'accoppiamento del modo.

È opportuno mandare il laser di pompa in (il prof usa l'espressione «riempire la cavità con») un *modo* (modo di oscillazione del campo elettromagnetico) che sia il più possibile simile ad uno dei *modi propri della cavità*.

Oltre al mode matching esiste poi un'altra questione : se consideriamo ad esempio come mezzo attivo il neodimio YAG, questo assorbe (radiazione di pompa) a  $\lambda_p = 805$  nm, mentre invece la lunghezza d'onda su cui emette è  $\lambda_L = 1064$  nm.

D'altra parte un modo per 'iniettare' la radiazione laser di pompa nella cavità laser è quello di 'entrare' nella cavità attraverso uno dei due specchi, che è *dicroico*, cioè in grado di riflettere certe frequenze di radiazione ed essere trasparente per altre.

È possibile realizzare specchi (**specchi dielettrici**) che hanno una riflettività quasi del 100% per la radiazione laser, e una trasmissività del 100% per la radiazione di pompa.

Uno specchio dielettrico è fatto con una serie di strati di materiale dielettrico di spessore e indice di rifrazione opportuni.

In generale uno specchio che ha riflettività diverse in funzione della frequenza si definisce specchio *dicroico*.

Un altro metodo di pompaggio, che ultimamente si sta diffondendo, è quello che si può realizzare con le *cavità monolitiche*.

Si tratta di un tipo di laser in cui il mezzo attivo è realizzato con una forma particolare (il prof dice 'a forma di bara') in modo che, una volta che la radiazione vi entra, viene poi riflettuta, e mantenuta all'interno del mezzo attivo, dal mezzo attivo stesso, a causa del fenomeno della riflessione totale.

Gli aspetti positivi di questa configurazione sono le dimensioni ridotte, e l'assenza del problema della vibrazione degli specchi.

Di solito questi cristalli monolitici sono appoggiati su un 'Peltier', in modo da variarne la temperatura ed ottenere una certa variazione della lunghezza d'onda della radiazione laser (tuning).

- lampada a scarica

Lampade al cui interno si provoca una scarica con dei grossi condensatori ( $10^2 \div 10^4$  mF).

Sono tipi di pompaggio impulsati, e sono usati generalmente per mezzi attivi gassosi.

C'è bisogno di un picco di tensione iniziale, per 'bucare' il gas, e aprire il varco per la scarica.

100  $\mu$ s, fino al ms, o al  $\mu$ s.

Le lampade sopravvivono per i laser a Nd-YAG pulsati di grande potenza.

Nei laser a coloranti il pompaggio avviene prevalentemente con laser, in continua o pulsati.

- pompaggio elettrico

È parente al pompaggio ottico.

Degli elettroni vengono accelerati, e provocano l'inversione di popolazione.

Osserviamo che per un laser a gas il pompaggio con una lampada sarebbe sprecato, in quanto lo spettro energetico è fatto a livelli discreti e non a bande, e dunque la lampada, emettendo in un'ampia banda di frequenze, vedrebbe sprecata la maggior parte della potenza emessa.

Dunque per i laser a gas si usa il pompaggio elettrico.

Gli elettroni urtano contro gli atomi e li eccitano.

Le collisioni sono essenzialmente elastiche, in quanto la massa di atomi o molecole è

molto maggiore di quella dell'elettrone.

Tuttavia gli elettroni cedono un pò di energia, non in termini di energia, che va a finire non in energia cinetica ma in 'energia interna' (eccitazione degli elettroni, o eccitazione vibrazionale).

Apriamo una parentesi.

Questo tipo di collisione si definisce 'collisione di prima specie', per distinguerla dalle collisioni di seconda specie, in cui una particella eccitata collide con un'altra particella eccitata.

In un laser a He-Ne, la radiazione laser è prodotta da una transizione del neon.

La funzione dell'elio è quella di venire eccitato dalle collisioni con gli elettroni della corrente che viene fatta fluire nella cavità.

La transizione che si eccita nell'elio per collisione con gli elettroni è una transizione che è proibita (molto improbabile) in quanto transizione provocata da interazione radiazione - materia.

Questo significa che il livello dell'elio che si eccita per collisione con gli elettroni non si può diseccitare emettendo un fotone (o quanto meno lo può fare con scarsa probabilità), e dunque si tratta di un livello metastabile (con vita media molto lunga).

Essendo un livello metastabile, riesce a popolarsi molto.

A questo punto, questi atomi di elio eccitati, molto numerosi, possono collidere con gli atomi di neon.

Un fatto importante è che il livello eccitato e metastabile dell'elio ha un'energia molto simile al livello del neon che poi emette la radiazione laser.

Allora, gli atomi eccitati di elio eccitano questo livello del neon con collisioni di seconda specie.

Essendo gli atomi di elio eccitati molto numerosi, a causa della metastabilità del loro livello eccitato, questo pompaggio per collisione di seconda specie è molto efficiente.

Senza elio gli atomi di neon si potrebbero eccitare solo per collisioni di prima specie con gli elettroni, che è molto meno efficiente.

Tornando al pompaggio per scarica in generale, diciamo che la scarica è un oggetto un pò complicato.

Consideriamo un'ampolla riempita di gas, con due elettrodi.

Supponiamo di ionizzare una molecola di gas, avendo una coppia elettrone - ione.

Questa coppia di particelle cariche comincia ad accelerare, a causa del campo elettrico creato dagli elettrodi. Quando queste particelle cariche hanno acquistato sufficiente energia cinetica potrebbero ionizzare altre molecole di gas, oppure potrebbero 'ricombinarsi' prima di collidere e riuscire a ionizzare altre particelle. Questo dipende dall'intensità del campo elettrico creato dagli elettrodi, e dalla densità e/o pressione del gas.

Si definisce scarica autosostenuta una scarica che, una volta avviata dall'esterno

con qualcosa che provoca una ionizzazione iniziale (raggi cosmici, extratensione agli elettrodi), è in grado di mantenersi solo grazie al campo elettrico degli elettrodi.

Altro fatto : nelle cavità laser preferiamo non avere scariche ad arco, ma scariche a bagliore.

Infatti la scarica ad arco è molto localizzata nello spazio, e quindi riesce ad eccitare solo piccole porzioni del mezzo attivo.

La scarica a bagliore (glow discharge) interessa invece tutto il mezzo attivo).

Intorno agli anni 40-50 sono state investigate a lungo le scariche elettriche. Descriverle analiticamente è difficile, sono cose simili alla fluidodinamica, con andamenti tutt'altro che lineari.

Per uno studio preliminare si può investigare la curva caratteristica tensione - corrente, mettendo un generatore ai capi dell'ampolla col gas, e una resistenza variabile che permette di spazzare un lungo range di tensioni (resistenza di Ballast). Con un amperometro e un voltmetro si prendono i valori.

Si possono individuare diversi 'regimi' della scarica, per diversi intervalli di tensione (vedi figura a pag 334).

Per correnti molto basse ( $10^{-20} \div 10^{-10}$  ampere) si hanno delle tensioni molto basse

[...]

la percentuale di particelle ionizzate è di  $10^{-6}$  %, e dunque è un plasma 'modesto'.

Gli elettroni nello spazio di Aston non hanno l'energia sufficiente ad eccitare

nella colonna positiva hanno un tipo di movimento 'drift like'.

all'angolo di Brewster la radiazione polarizzata linearmente è tutta trasmessa.

TEA (transverse electric a...)

distinzione tra la temperatura del gas, la temperatura degli ioni, e temperatura degli elettroni : ognuno ha una diversa distribuzione di energia cinetica.

[...]

- Sezioni d'urto delle eccitazioni per collisione con elettrone  
(1h 5' 10")

A stato solido abbiamo studiato la probabilità di transizione 'ad' un livello atomico a causa dell'assorbimento di un fotone.

In particolare, con la teoria delle perturbazioni, abbiamo ottenuto delle probabilità di transizioni (che è 'parente' ad una sezione d'urto).

Vogliamo adesso ottenere qualcosa di analogo per l'eccitazione per collisione con un

elettrone.

La prima differenza è che affinché ci sia la transizione del livello atomico non è necessario che l'elettrone abbia una particolare energia, basta che l'elettrone abbia un'energia sufficiente. Si tratta dunque di un fenomeno 'a soglia'.

Possiamo poi studiare l'attenuazione del fascio di fotoni, ottenendo una legge simile alla legge di Lambert Beer :

$$dF_e = -\sigma_e N_1 F_e dz$$

Questa è l'espressione della variazione di intensità del flusso di elettroni in seguito alla penetrazione in un mezzo.

$F_e$  è il flusso di elettroni,  $\sigma_e$  è la sezione d'urto di eccitazione elettronica, e  $z$  è il tratto di cui è penetrato il fascio di elettroni dentro al mezzo (gas).

La variazione di popolazione del livello 2 è proporzionale alla popolazione del livello 1, alla sezione d'urto di eccitazione elettronica, e al flusso di elettroni :

$$\frac{dN_2}{dt} = \sigma_e N_1 F_e$$

ma il flusso di elettroni lo possiamo scrivere come una densità di elettroni per una loro velocità :

$$\frac{dN_2}{dt} = \sigma_e N_1 n_e v.$$

Per fare le cose per bene dobbiamo però tenere conto del fatto che la velocità degli elettroni ha una certa distribuzione  $f(E)$  (distribuzione di Maxwell - Boltzmann), e anche la sezione d'urto dipende dall'energia degli elettroni. Quindi usiamo dei valori medi :

$$\langle v \sigma_e \rangle = \int v \sigma_e(E) f(E) dE$$

e in definitiva :

$$\frac{dN_2}{dt} = N_1 n_e \langle v \sigma_e \rangle$$

A pag 336 c'è un grafico degli andamenti delle sezioni d'urto in funzione dell'energia degli elettroni (vedi figura).

Abbiamo due andamenti diversi a seconda che la transizione che eccitano gli

elettroni è, rispetto all'eccitazione per assorbimento di un fotone, permessa o proibita (al prim'ordine della teoria delle perturbazioni).

Entrambi gli andamenti sono 'a soglia', con una crescita ripida, un massimo, e un 'decadimento' all'aumentare dell'energia.

La differenza sostanziale tra questi due andamenti è che le transizioni otticamente permesse decadono più lentamente all'aumentare dell'energia.

Per calcolare la sezione d'urto si può usare un semplice modello di Bohr.

Descriviamo l'elettrone con la sua funzione d'onda, che ha una certa lunghezza d'onda di de Broglie  $\lambda_e = \frac{p}{\hbar}$ , e un certo vettore d'onda  $\vec{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda_e}$ .

Supponendo che la collisione con la particella è elastica, l'energia dell'elettrone si conserva, e quello che cambia è solo la direzione del vettore d'onda.

Se si fanno i conti con la teoria delle perturbazioni e si calcola la sezione d'urto (probabilità di transizione) si ha :

$$\sigma \propto \mu \left| \langle u_1 | e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}} | u_2 \rangle \right|^2$$

dove  $\vec{k}_0$  e  $\vec{k}_s$  sono i vettori d'onda associati all'elettrone prima e dopo la collisione.

Per l'ordine di grandezza delle energie tipiche che si considerano per gli elettroni ( $\approx 10$  eV), le loro lunghezze d'onda di de Broglie sono maggiori delle dimensioni atomiche.

In tal caso si può sviluppare in serie l'esponenziale che compare

$$e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}} \approx 1 + i(\vec{k}_0 - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}$$

e quindi abbiamo un andamento del tutto analogo a quello per le transizioni ottiche, proporzionale al momento di dipolo elettrico :

$$\sigma \propto \mu \left| \langle u_1 | \vec{r} | u_2 \rangle \right|^2 \propto \mu \lambda_e^2$$

Tuttavia, per le transizioni otticamente proibite le cose cambiano un pò (non ho capito bene, approfondire).

Il rapporto tra le sezioni d'urto per transizioni proibite e quelle permesse

$$\frac{\square_{\text{proib}}}{\square_{\text{perm}}}$$

è dell'ordine di  $10^{-3}$ , laddove per i fotoni è dell'ordine di  $10^{-5}$ .

Il prof accenna al pompaggio chimico : si possono produrre delle specie 'direttamente in uno stato eccitato' in seguito a reazioni chimiche.

Un esempio (l'uinco?) di laser che utilizza questo pompaggio chimico è il laser ad acido cloridrico (HF).

Tuttavia per avere la reazione si può avere solo se abbiamo i reagenti in forma atomica, e dunque abbiamo bisogno comunque di una scarica per dissociare le molecole.

C'è poi un accenno al laser ad eccimeri.

[...] un gas nobile eccitato assomiglia ad un atomo alcalino. È un laser a due livelli, ma c'è un trucco : il livello basso è per definizione vuoto [...]

In questi due tipi di laser il pompaggio elettronico è usato in maniera indiretta.

### • Teoria del laser

(lez 24; 1h 19' 40"; pag 487)

#### - approccio semiclassico (cenni)

Esistono vari possibili approcci per studiare il laser in quanto sistema ottico.

Un primo approccio è una teoria semiclassica, in cui il campo è trattato in maniera classica, e l'interazione con la materia è trattata in maniera quantistica.

Studiamo cosa succede nel mezzo attivo.

Nel mezzo attivo c'è un campo elettrico, e questo induce dei dipoli.

A questo punto intervengono dei 'discorsi con la matrice densità e l'equazione di Schrödinger' (il prof si mantiene sul vago, e dice che uno tratta il problema in maniera più o meno sofisticata a seconda di cosa vuole fare).

Il momento di dipolo indotto crea un vettore di polarizzazione che si può inserire nelle equazioni di Maxwell come (altro) termine sorgente, e con queste 'nuove' equazioni di Maxwell si ricalcola il campo.

Per garantire l'autoconsistenza di tutto ciò questo campo ricalcolato deve coincidere con il campo visto all'inizio, che induce la polarizzazione.

A pag 487 c'è uno schema concettuale :

+ il campo 'iniziale' è trattato classicamente

+ con la teoria perturbativa (quantistica, ma semiclassica proprio perché il campo è classico) si descrive il singolo momento di dipolo

+ con la meccanica statistica (matrici densità?) si ottiene il vettore di



polarizzazione totale

+ infine si applica l'elettromagnetismo (equazioni di Maxwell) per riottenere il campo 'classico'.

Noi non seguiremo quest'approccio.

Tantomeno seguiremo un approccio puramente quantistico, che passa per la seconda quantizzazione.

- approccio con il modello di Einstein

Quello che useremo noi è un modello molto semplice, che in fondo è quantistico, ma che fa uso solo delle *equazioni di bilancio*.

(aggiunta mia, credo che sia il modello fenomenologico di Einstein).

Faremo l'ipotesi che c'è solo un modo elettromagnetico 'eccitato'.

In questo modo andremo a studiare il numero di fotoni che si possono accumulare.

Inoltre utilizzeremo l'ipotesi di 'decadimento veloce', sia 'verso il livello laser superiore', sia 'dal livello laser inferiore al livello fondamentale' (nello schma a 4 livelli).

In altre parole in queste ipotesi si considerano trascurabili le popolazioni sia del livello 3 (livello alto) sia del livello 1 (livello laser inferiore).

\* impostazione delle equazioni di bilancio

Cominciamo a vedere uno schema di laser a 4 livelli (vedi figura pag 488).

Con un certo sistema di pompaggio, ottico o elettrico, con un certo rate  $w_p$  si riesce a portare gli atomi (o le molecole, diciamo 'particelle' in genere) nel livello 3.

Facciamo l'ipotesi che la transizione (decadimento) tra il livello 3 e il livello 2 sia 'veloce', e così pure la transizione tra il livello 1 e il livello fondamentale 0.

In altre parole supponiamo che la popolazione dei livelli 3 e 1 sia pressoché nulla, e dunque la somma delle popolazioni del livello 2 e del livello fondamentale coincida (quasi) con la popolazione totale del sistema :

$w_p$                       rate di pompa

$w_{32}$  ;  $w_{10}$               rate molto alti

$N_3 \approx N_1 \approx 0$

$$N_2 + N_0 = N_{\text{tot.}}$$

Le equazioni di bilancio (rate equations) sono :

$$\frac{dN_2}{dt} = w_p N_0 - Bq N_2 - \frac{N_2}{\tau}$$

$$\frac{dq}{dt} = V_a Bq N_2 - \frac{q}{\tau_c} + V_a \frac{N_2}{\tau}$$

dove ricordiamo che le popolazioni sono in realtà densità di particelle per unità di volume, e quindi nella seconda equazione compare anche il volume di mezzo attivo, in modo da ottenere proprio il numero di particelle).

Vediamo che queste equazioni ci forniscono la popolazione del livello 2 (l'unica rilevante, insieme a quella del livello fondamentale, che possiamo conoscere per differenza) e il numero di fotoni  $q$  che si trovano nel modo elettromagnetico associato alla transizione 2  $\rightarrow$  1 (transizione laser).

Si tratta di equazioni accoppiate, e non lineari.

Commentiamo termine a termine.

Nella prima equazione, al membro di sinistra c'è la variazione della popolazione del livello 2.

Al secondo membro ci sono i vari termini di sorgenti (segno +) e di perdita (segno -) : il termine di popolamento, che dipende dalla velocità di pompaggio della pompa  $w_p$ , poi c'è il termine di perdita che descrive l'emissione stimolata, che dipende dalla popolazione del livello 2, dal numero di fotoni nel modo associato alla transizione, e dal coefficiente  $B$  (coefficiente di Einstein), e un termine che descrive l'emissione spontanea, che dipende solo dalla popolazione del livello 2, con un coefficiente che descrive il tempo caratteristico dell'emissione spontanea.

La seconda equazione descrive invece la variazione del numero di fotoni  $q$  che stanno nel modo laser associato alla transizione 2  $\rightarrow$  1. Al secondo membro compaiono un termine  $V_a Bq N_2$  che descrive il popolamento del modo a causa

della transizione laser, in cui c'è anche il 'volume del modo'  $V_a$ , un termine  $-\frac{q}{\tau_c}$  che tiene conto delle perdite, dove  $\tau_c$  è la vita media dei fotoni in cavità

( $\tau_c = \frac{2d}{c} \frac{1}{\ln[R^2(1-D^2)]}$ , controllare).

Ci sarebbe anche un terzo termine  $+ V_a \frac{N_2}{\tau}$ , che descrive il popolamento dovuto all'emissione spontanea (transizione spontanea 2  $\rightarrow$  1), ma decideremo di 'trascurarlo'.

Tra l'altro trattare questo termine è problematico, perché l'emissione spontanea è isotropa, e dunque dovremmo capire quanti di questi fotoni di emissione spontanea vanno nel modo che ci interessa.

Tuttavia bisogna tenere presente che sopprimendo questo termine generiamo una situazione strana.

Infatti se non c'è questo termine di emissione spontanea, se al tempo zero  $q = 0$ , la derivata al primo membro è zero, e dunque la popolazione di fotoni nel modo sarebbe costantemente nulla.

Di fatto questo significa che fisicamente i fotoni dell'emissione spontanea sono importanti solo per 'avviare' l'emissione laser, ma sono quantitativamente trascurabili.

Vedremo che c'è un modo per superare questo problema tenendo conto in qualche modo anche dell'emissione spontanea.

Soffermiamoci adesso sul volume  $V_a$ .

Ripetiamo che si tratta del volume che il modo elettromagnetico (che consideriamo come unico modo) occupa all'interno del mezzo attivo. Ricordiamo che le popolazioni sono sempre espresse come delle densità spaziali cioè numero per unità di volume, e non numero assoluto.

Diamo una stima di questo volume approssimando il modo come cilindrico, con diametro pari al waist :

$$V_a \approx \frac{\pi w_0^2 d}{4}$$

dove  $w_0$  è il waist e  $d$  è la lunghezza del mezzo attivo (vedi figura a pag 489).

Spendiamo qualche altra parola sull'emissione spontanea.

Abbiamo detto che trascuriamo il termine di emissione spontanea nella seconda equazione, perché è quantitativamente non rilevante. Ma abbiamo anche detto che non tenerne conto porta a un 'nonsenso matematico-fisico' : l'azione laser non può cominciare.

Riguardo all'emissione spontanea, quando si tratta questo sistema in maniera più 'esatta', con la seconda quantizzazione, si arriva al seguente risultato : per tenere conto dell'emissione spontanea basta scrivere  $q+1$  al posto di  $q$  nel termine di popolamento del modo :

$$\frac{d N_2}{d t} = w_p N_0 - B q N_2 - \frac{N_2}{\tau}$$

$$\frac{d q}{d t} = V_a B N_2 (q+1) - \frac{q}{\tau_c}$$

Vediamo adesso di dare una stima dei parametri  $B$  e  $\Gamma_c$ .  
In realtà l'abbiamo già calcolati, ma adesso lo rifacciamo.

\* Studio del laser e in regime di piccoli segnali (ipotesi di trovarsi poco sopra soglia), e in regime stazionario

strategia di calcolo :

- > si ricavano le espressioni del coefficiente di Einstein  $B$  e della vita media dei fotoni in cavità nell'ipotesi di piccoli segnali (cioè di trovarsi poco sopra soglia)
- > si fanno nelle equazioni di bilancio delle approssimazioni sulle popolazioni, nell'ipotesi di transizioni veloci
- > si risolvono le equazioni di bilancio (semplificate)
- > si sostituiscono le espressioni del coefficiente di Einstein e della vita media in cavità ottenute nell'ipotesi di stare poco sopra soglia
- > si ottengono l'inversione di popolazione critica e il rate di pompa critico cioè l'inversione di popolazione e il rate di pompa che si hanno nell'ipotesi di stare poco sopra soglia (praticamente in condizioni di soglia)

- espressione del coefficiente di Einstein  $B$  e della vita media dei fotoni in cavità  $\Gamma_c$  nell'ipotesi di trovarsi poco sopra soglia  
(5'18")

anticipiamo la strategia di calcolo :

- > scrivere la variazione di intensità dopo un round trip
- > introdurre l'ipotesi di trovarsi poco sopra soglia  $\Gamma_c$  sviluppo in serie dell'esponenziale
- > dividere la variazione di intensità per il tempo di un round trip
- > approssimare questo rapporto tra variazioni finite con la derivata
- > ma l'intensità è proporzionale al numero di fotoni per unità di tempo, quindi la derivata dell'intensità è uguale alla derivata del numero di fotoni
- > in questo modo riotteniamo la seconda equazione di bilancio (quella per il numero di fotoni, appunto) per altra via,
- > confronto con l'equazione di bilancio che già conosciamo
- > se ne ricava un'espressione per  $B$  e  $\Gamma_c$

Consideriamo un fascio di radiazione che compie un round trip.

L'espressione della variazione dell'intensità tiene conto della riflettività degli specchi, delle perdite dovute all'assorbimento degli specchi, e un termine che descrive le perdite per diffrazione, che compare al quadrato perché nel round trip ci sono due riflessioni. Infine c'è un termine che esprime

l'assorbimento/amplificazione dovuta al passaggio nel mezzo attivo, che è esponenziale (legge di Lambert Beer), con all'argomento la differenza di popolazione tra i due livelli laser (quando c'è inversione di popolazione diventa amplificazione) e la *sezione d'urto* della transizione laser :

$$I_f = I \left\{ (1 - a_1 - T_1) (1 - a_2 - T_2) (1 - T_i)^2 \right\} e^{2(N_2 - N_1)d}$$

dove abbiamo scritto separatamente per i due specchi (prime due parentesi tonde) la perdita per assorbimento e la perdita per riflettività finita (riflettività scritta come 1 - trasmittività).

La sola differenza di intensità dopo il round trip è dunque :

$$\Delta I = I_f - I = I \left\{ (1 - a_1 - T_1) (1 - a_2 - T_2) (1 - T_i)^2 e^{2(N_2 - N_1)d} - 1 \right\}$$

dove ribadiamo che  $a_1$  e  $a_2$  sono rispettivamente i due termini di assorbimento dei due specchi,  $T_1$  e  $T_2$  sono le due trasmittività, e  $T_i$  è una 'trasmittività per diffrazione' (ma credo che a rigore qui si debba parlare per trasmittanza).

Se facciamo l'ipotesi che i coefficienti di assorbimento sono molto minori dei coefficienti di trasmittività :

$$a_1 \text{ e } a_2 \equiv a \ll T_1, T_2$$

possiamo fare delle approssimazioni :

$$(1 - a - T_1) \approx (1 - a) \left( 1 - \frac{T_1}{1 - a} \right)$$

$$(1 - a - T_1) \approx (1 - a)(1 - T_1)$$

e analogamente

$$(1 - a - T_2) \approx (1 - a)(1 - T_2).$$

Dunque, sostituendo nell'espressione della differenza di intensità :

$$\Delta I = I \left\{ (1 - a)^2 (1 - T_i)^2 (1 - T_1)(1 - T_2) e^{2(N_2 - N_1)d} - 1 \right\}.$$

Adesso facciamo delle posizioni, per poter scrivere tutti i termini in forma esponenziale :

$$\alpha_1 \equiv -\ln(1 - T_1)$$

$$1 - T_1 = e^{-\alpha_1}$$

$$\alpha_2 \equiv -\ln(1 - T_2)$$

$$1 - T_2 = e^{-\alpha_2}$$

$$\alpha \equiv -\ln[(1 - a) + \ln(1 - T_i)]$$

$$(1 - a)^2 (1 - T_i)^2 = e^{-2\alpha}$$

(parametri di perdita)

Ricordiamo che qui abbiamo scritto le cose in termini della trasmissività, ma è facile passare alle riflettività, che sono il loro 'complemento all'unità' ( $R = 1 - T$ ).

Infine possiamo introdurre un termine complessivo che tiene conto di tutte le perdite :

$$\alpha \equiv \alpha_i + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

Con queste posizioni la differenza di intensità diventa :

$$I = I_0 \left\{ e^{2[(N_2 - N_1)d - \alpha]} - 1 \right\}$$

Il primo termine dell'argomento dell'esponenziale rappresenta l'eventuale amplificazione, o *guadagno*, ma è tale solo se si ha un'inversione della popolazione dei livelli laser.

Vedremo che esiste una soglia alla quale il guadagno supera le perdite.

Adesso facciamo l'ipotesi di trovarci poco al di sopra di questa soglia. In altre parole ci mettiamo in un *regime di piccoli segnali*.

In generale, quando andiamo ad investigare la 'funzione di trasferimento' di un sistema, soprattutto se il sistema ha un comportamento non lineare (e il laser è fortemente non lineare), conviene cominciare mandando piccoli segnali.

Ebbene, in questa ipotesi la differenza tra il termine di guadagno e il termine di perdita è piccola :

$$(N_2 - N_1)d - \alpha \ll 1 \quad (\text{ipotesi di stare poco sopra soglia})$$

e quindi possiamo sviluppare in serie al prim'ordine l'esponenziale :

$$I \approx I \left\{ 1 + 2[(N_2 - N_1)d - \alpha] - 1 \right\}$$

$$= I \left\{ 2 \left[ (N_2 - N_1) d \right] \right\}.$$

Questa è una intensità, cioè un numero di fotoni che passa nell'unità di tempo. Dunque se la dividiamo per il tempo che ci impiega la radiazione a compiere il round trip otteniamo una variazione di numero di fotoni.

Il tempo del round trip si ottiene moltiplicando la velocità della luce  $c$  per la lunghezza della cavità. Ma utilizziamo una *lunghezza efficace*  $L'$  anziché la lunghezza reale  $L$  per tenere conto del diverso indice di rifrazione (cavità e mezzo attivo) che la luce incontra :

$$\Delta t = \frac{2 L'}{c} \quad (\text{durata del round trip})$$

$$\text{dove } L' = L + (n - 1) d$$

(Attenzione, credo che questa formula sia sbagliata, e che quella giusta sia

$$L' = L + \frac{1 - n}{n} d).$$

Dunque

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = I \frac{d c}{L'} (N_2 - N_1) \approx \frac{c}{L'} I$$

ed essendo l'intensità proporzionale al numero di fotoni, possiamo dire che questa è la variazione di numero di fotoni. Approssimando, possiamo anche dire che questa è la variazione infinitesima, cioè la derivata del numero di fotoni :

$$\frac{d q}{d t} = \frac{d c}{L'} (N_2 - N_1) q \approx \frac{c}{L'} q.$$

Abbiamo dunque raggiunto il nostro scopo : abbiamo ottenuto per altra strada un'espressione della variazione del numero di fotoni.

In questo modo, mettendo a confronto questa espressione con la seconda delle rate equations, che pure è un'espressione della variazione del numero di fotoni, possiamo trovare un'espressione esplicita del coefficiente di Einstein  $B$  e della vita media dei fotoni in cavità  $\tau_c$  che vi compaiono.

L'equazione di bilancio con cui confrontare è :

$$\frac{d q}{d t} = V_a B N_2 q - \frac{q}{\tau_c}$$

e dunque abbiamo, per la vita media :

$$\tau_c = \frac{L'}{c}$$

e esplicitando il coefficiente di perdita :

$$\alpha \equiv \alpha_i + \frac{\alpha_a + \alpha_b}{2}$$

$$\alpha = \alpha \ln(1 - a) + \alpha \ln(1 - T_i) + \frac{\ln(1 - T_1) + \ln(1 - T_2)}{2}$$

abbiamo :

$$\tau_c = \frac{L'}{c \left[ \alpha \ln(1 - a) + \alpha \ln(1 - T_i) + \frac{\ln(1 - T_1) + \ln(1 - T_2)}{2} \right]}$$

Se trascuriamo le perdite per assorbimento ( $a \approx 0$ ) e ricordiamo che la riflettività è il complemento all'unità della trasmissività ( $1 - T_x = R_x$ ) si riottiene l'espressione della vita media dei fotoni in cavità ottenuto anche per altra strada :

$$\tau_c = \frac{2 L'}{c \left[ 2 \ln(1 - T_i) + \ln R_1 + \ln R_2 \right]}$$

$$\tau_c = \frac{2 L'}{c} \frac{1}{\ln R_1 R_2 (1 - T_i)^2}$$

Riguardo a  $B$  si ha

$$V_a B N_2 q = \frac{\rho d c}{L'} (N_2 - N_1) q$$

ora, nell'ipotesi che la transizione  $1 \rightarrow 0$  è veloce, la popolazione  $N_1$  è trascurabile, e dunque

$$V_a B = \frac{\rho d c}{L'}$$



$$B = \frac{\hbar d c}{V_a L'}$$

$$B = \frac{\hbar c}{V} \quad (\text{coefficiente } B \text{ in regime di piccoli segnali})$$

dove abbiamo posto :

$$V = V_a \frac{L'}{d} = \hbar w_0^2 \frac{d}{4} \frac{L'}{d} = \frac{\hbar w_0^2 L'}{4}$$

che ha il significato fisico di 'volume effettivo' attraversato dal modo.

Ricordiamo che questo risultato lo abbiamo ottenuto (e dunque è valido solo) nell'ipotesi di stare poco sopra la soglia cioè nella condizione in cui il guadagno supera di poco le perdite (inversione di popolazione poco sopra l'inversione 'di soglia').

- semplificazioni delle espressioni delle popolazioni e conseguente forma semplificata delle equazioni di bilancio

Facciamo delle posizioni riguardo alle popolazioni, per maggiore chiarezza :

$$N \equiv N_2 - N_1$$

è la 'differenza di popolazione tra i livelli laser'. Nell'ipotesi che la transizione 1 -> 0 è veloce, la popolazione  $N_1$  è trascurabile, e dunque possiamo approssimare :

$$N \approx N_2 \quad (\text{inversione di popolazione approssimata}).$$

Allo stesso modo, nelle ipotesi che 1 -> 0 e 3 -> 2 sono transizioni veloci, possiamo esprimere la popolazione totale come la somma solo delle popolazioni di 2 e 0 :

$$N_{\text{tot}} = N_2 + N_0.$$

Con queste posizioni, le equazioni di bilancio per un laser a 4 livelli diventano :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= w_p (N_{\text{tot}} - N_2) - B q N - \frac{N_2}{\tau} \\ \dot{q} &= \frac{\hbar}{V_a} B N_2 - \frac{1}{\tau_c} q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{N} &= w_p (N_{\text{tot}} - N) - B q N - \frac{N}{\tau} \\ \dot{q} &= V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q \end{aligned}$$

Se facciamo conti analoghi per un laser a tre livelli otteniamo invece le seguenti equazioni :

$$\begin{aligned} \dot{N} &= w_p (N_{\text{tot}} - N) - 2 B q N - \frac{N_{\text{tot}} + N}{\tau} \\ \dot{q} &= V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q \end{aligned}$$

dove questa volta, con tre livelli, la transizione laser è 2 -> 1, l'ipotesi di transizione veloce riguarda 3 -> 2, e le posizioni sulle popolazioni sono :

$$N = N_2 - N_1$$

e

$$N_{\text{tot}} = N_1 + N_2.$$

Riguardo alla realizzazione concreta di un laser, affinché le ipotesi di 'transizioni veloci' siano effettivamente vere, si devono scegliere sistemi con livelli energetici le cui vite medie siano compatibili con tali ipotesi.

Ci sono dei sistemi in cui l'inversione di popolazione si può realizzare solo per periodi transitori, e dunque possono essere usati solo per laser pulsati.

- **risoluzione delle equazioni di bilancio (in regime di piccoli segnali, condizioni stazionarie) rispetto all'inversione di popolazione (inversione di popolazione critica) e rispetto al rate di pompa (rate di pompa critico)**

(14' 00" pag 494)

Risolviamo dunque queste equazioni di bilancio così 'semplificate', nel caso stazionario, cioè imponendo che la popolazione del livello 2 e il numero di fotoni nel modo siano costanti.

Cominciamo a fare i conti per il laser a 4 livelli.

Le equazioni di bilancio trovate prima per un laser a 4 livelli sono

$$\begin{aligned} \dot{N} &= w_p (N_{\text{tot}} - N) - BqN - \frac{N}{\tau} \\ \dot{q} &= V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q \end{aligned}$$

di cui la seconda è l'equazione di bilancio per il numero di fotoni :

$$\dot{q} = V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q$$

che dunque 'a regime' (condizione stazionaria) è :

$$V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q = 0.$$

Ricordando l'ipotesi di trovarci (poco) sopra soglia, il numero di fotoni è  $q \neq 0$ , e dunque possiamo dividere per  $q$ , ottenendo :

$$V_a B N - \frac{1}{\tau_c} = 0$$

$$V_a B N = \frac{1}{\tau_c}$$

da cui l'inversione di popolazione è

$$N_c = \frac{1}{V_a B \tau_c}$$

(ricordiamo che abbiamo posto  $N = N_2 - N_1$ , cioè la differenza di popolazione tra i due livelli laser).

Se in questa espressione sostituiamo le espressioni di  $B$  e  $\tau_c$  che abbiamo ottenuto nell'ipotesi di trovarci poco sopra la soglia (sviluppo in serie dell'esponenziale che compare nella variazione di intensità (legge di Lambert-Beer, [vedi](#)))

$$B = \frac{\alpha d c}{V_a L'} \quad ; \quad \tau_c = \frac{L'}{c}$$

si ha :

$$N_c = \frac{1}{V_a \frac{\sigma_{dc} L'}{V_a L' \sigma_c}}$$

$$N_c = \frac{\sigma}{\sigma d}$$

dove ricordiamo che  $\sigma$  è la sezione d'urto della transizione laser,  $d$  è la lunghezza del mezzo attivo, e  $\sigma$  è un coefficiente che esprime tutte le perdite.

Un modo alternativo di arrivare allo stesso risultato è di usare l'espressione della variazione di intensità dopo un round trip

$$I = I \left\{ e^{2[\sigma(N_2 - N_1)d - \sigma]} - 1 \right\}$$

imponendo che il termine di guadagno uguagli il termine di perdita :

$$\sigma(N_2 - N_1)d - \sigma = 0$$

$$(N_2 - N_1) = \frac{\sigma}{\sigma d}$$

$$N_c = \frac{\sigma}{\sigma d} \quad (\text{inversione di popolazione critica}).$$

Trovata l'inversione di popolazione critica (quella per la quale si passa da sotto soglia a sopra soglia, cioè per la quale il guadagno supera le perdite), possiamo trovare il corrispondente *rate di pompa critico*, associato a questa inversione di popolazione critica.

Per farlo torniamo alle equazioni di bilancio (per lo schema a 4 livelli)

$$\begin{aligned} \dot{N} &= w_p (N_{\text{tot}} - N) - BqN - \frac{N}{\tau} \\ \dot{q} &= \frac{1}{V_a} B N - \frac{1}{\tau_c} q \end{aligned}$$

e imponiamo nella prima la stazionarietà :

$$w_p (N_{\text{tot}} - N) - B q N - \frac{N}{\tau} = 0 \quad \text{- laser -}$$

utilizziamo ora l'ipotesi di stare appena sopra soglia, per cui  $q \approx 0$  e  $N = N_c$  :

$$w_{cp} (N_{\text{tot}} - N_c) = \frac{N_c}{\tau}$$

$$w_{cp} = \frac{N_c}{\tau (N_{\text{tot}} - N_c)}$$

che è appunto il 'rate di pompa critico'.

Ricordiamo che  $\tau$  è la vita media del livello laser superiore (il livello 2) (mentre  $\tau_c$  era la vita media dei fotoni in cavità).

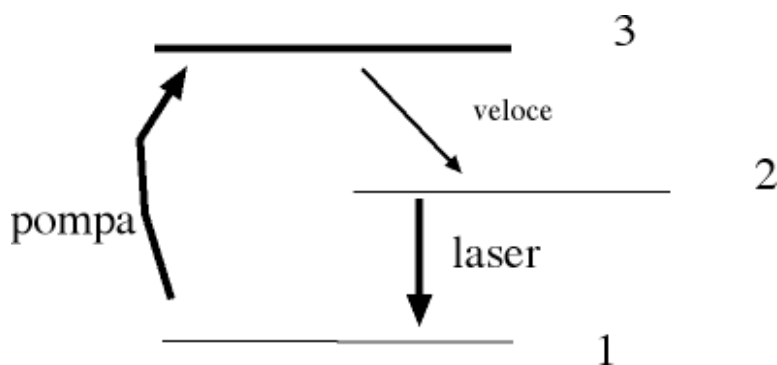
Nell'approssimazione  $N_{\text{tot}} \gg N_c$  si ha :

$$w_{cp} = \frac{N_c}{N_{\text{tot}}} \frac{1}{\tau}$$

e esplicitando l'espressione dell'inversione di popolazione critica :

$$w_{cp} = \frac{\tau}{\tau d \tau N_{\text{tot}}} \quad \text{(rate di pompa critico).}$$

Con conti del tutto analoghi si tratta lo schema a 3 livelli :



Si parte dalle equazioni di bilancio per lo schema a 3 livelli :

$$\dot{N} = w_p (N_{\text{tot}} - N) - 2 B q N - \frac{N_{\text{tot}} + N}{\tau}$$

$$\dot{q} = V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q$$

si impone la stazionarietà

$$0 = w_p (N_{\text{tot}} - N) - 2 B q N - \frac{N_{\text{tot}} + N}{\tau}$$

$$0 = V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q$$

nell'ipotesi di stare poco sopra soglia  $q$  è una grandezza positiva (per il passaggio nella seconda equazione) ma trascurabile (nella prima) :

$$w_{cp} (N_{\text{tot}} - N_c) = \frac{N_{\text{tot}} + N_c}{\tau}$$

$$V_a B N_c = \frac{1}{\tau_c}$$

$$w_{cp} = \frac{N_{\text{tot}} + N_c}{(N_{\text{tot}} - N_c) \tau}$$

$$N_c = \frac{1}{V_a B \tau_c}$$

sostituendo l'espressione di  $B$  e di  $\tau_c$  trovate nell'ipotesi di piccoli segnali :

$$w_{cp} = \frac{N_{\text{tot}} + N_c}{(N_{\text{tot}} - N_c) \tau}$$

$$N_c = \frac{1}{\tau d}$$

Ma poiché  $N_c \ll N_{\text{tot}}$ , riguardo al rate di pompa critico si ha :

$$w_{cp}^{(3)} \approx \frac{1}{\tau}$$

laddove ricordiamo che per un laser a 4 livelli abbiamo trovato

$$w_{cp}^{(4)} = \frac{1}{d N_{tot}}$$

$$w_{cp}^{(4)} = \frac{N_c}{N_{tot}}$$

Dal confronto concludiamo che

$$w_{cp}^{(4)} = w_{cp}^{(3)} \frac{N_c}{N_{tot}}$$

ed essendo  $N_c \ll N_{tot}$  questo significa che  $w_{cp}^{(4)} \ll w_{cp}^{(3)}$ .

In altre parole il rate critico, corrispondente all'inversione di popolazione critica, quella che rende il guadagno superiore alle perdite, per un laser a 4 livelli è più bassa che per un laser a 3 livelli.

Ma questo è anche 'intuitivo'.

Infatti nel laser a 4 livelli il livello laser basso è (quasi) vuoto, e dunque è più facile ottenere l'inversione di popolazione (che infatti coincide quasi con la popolazione del livello laser superiore). Invece per un laser a 3 livelli il livello laser basso è anche il livello 'da cui pompamo', cioè da cui la pompa preleva gli atomi per portarli nel livello 3.

\* Studio del laser (molto) sopra soglia, ma sempre in regime stazionario

Rilasciamo adesso l'ipotesi di trovarci appena sopra soglia, e consideriamo il caso stazionario 'qualunque', ossia per un rate di pompa superiore al rate di pompa critico

$w_{cp}$  :

$$\dot{N} = w_p (N_{tot} - N) - Bq N = \frac{N}{\tau}$$

$$\dot{q} = V_a B N - \frac{1}{\tau_c} q$$

$$\begin{aligned} \dot{N}_0 &= w_p (N_{\text{tot}} - \tilde{N}) - B \tilde{q} \tilde{N} - \frac{\tilde{N}}{\tau} \\ \dot{N}_1 &= V_a B \tilde{N} - \frac{1}{\tau_c} \tilde{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \tilde{q} \tilde{N} &= w_p (N_{\text{tot}} - \tilde{N}) - \frac{\tilde{N}}{\tau} \\ V_a B \tilde{N} &= \frac{1}{\tau_c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \tilde{q} \frac{1}{V_a B \tau_c} &= w_p (N_{\text{tot}} - \tilde{N}) - \frac{\tilde{N}}{\tau} \\ \tilde{N} &= \frac{1}{V_a B \tau_c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= V_a \tau_c w_p (N_{\text{tot}} - \tilde{N}) - \frac{\tilde{N}}{\tau} \\ \tilde{N} &= \frac{1}{V_a B \tau_c} \end{aligned}$$

dove  $\tilde{N}$  e  $\tilde{q}$  sono rispettivamente l'inversione di popolazione e il numero di fotoni *stazionari*.

Osserviamo che l'inversione di popolazione stazionaria  $\tilde{N}$  coincide con l'inversione di popolazione *critica*  $N_c$ .

Questo significa che quando aumentiamo il rate di pompa al di sopra del suo valore critico  $w_p > w_{c,p}$  (quello affinché il guadagno superi le perdite), i fotoni di pompa 'in più' non vanno ad aumentare l'inversione di popolazione, ma vanno nell'emissione laser.

Dunque l'andamento della popolazione del livello laser superiore (che coincide quasi con l'inversione di popolazione', nel caso di laser a 4 livelli) è dapprima lineare, e raggiunto un valore critico è costante (vedi figura a pag 495).

Viceversa vediamo che il numero di fotoni del modo laser, in regime stazionario, dipendono linearmente dal rate di pompa, purché il rate di pompa superi un valore di soglia. Se il rate è sotto la soglia il numero di fotoni è nullo (vedi figura a pag 495).



### \* Potenza emessa dal laser

La quantità più 'interessante' è  $\tilde{q}$ , perché è legata alla potenza che il laser emette.

Riscriviamo la sua espressione facendoci comparire il rate di pompa critico :

$$\tilde{q} = V_a \frac{\kappa_c}{\kappa} \frac{w_p}{w} (N_{\text{tot}} - \tilde{N}) \frac{\tilde{N}}{E}$$

$$\tilde{q} = V_a \frac{\kappa_c}{\kappa} \frac{\tilde{N}}{w} \frac{w_p}{w} \frac{N_{\text{tot}} - \tilde{N}}{\tilde{N}} \frac{1}{E}$$

e ricordando che  $\tilde{N} = N_c$  e che  $w_{cp} = \frac{N_c}{N_{\text{tot}} - N_c} \frac{1}{w}$  si ha in definitiva :

$$\tilde{q} = V_a \frac{\kappa_c}{\kappa} N_c \frac{w_p}{w_{cp}} \frac{1}{E}$$

$$\tilde{q} = V_a \frac{\kappa_c}{\kappa} N_c [x - 1]$$

dove abbiamo introdotto la quantità

$$x \equiv \frac{w_p}{w_{cp}} = \frac{P_p}{P_{\text{th}}}$$

che ci dice di quanto il rate di pompa è superiore al suo valore critico, che poi è lo stesso che dire di quanto la potenza della pompa è superiore al suo valore 'di soglia' (th sta per threshold).

In definitiva  $x$  dice quanto siamo sopra soglia.

Se sostituiamo l'espressione di  $\tilde{N} = N_c = \frac{\kappa_c}{\kappa} d$  abbiamo :

$$\tilde{q} = V_a \frac{\kappa_c}{\kappa} \frac{\kappa_c}{\kappa} d [x - 1]$$

e, definendo la quantità

$$A_e = \frac{V_a}{d}$$

(sezione della porzione di mezzo attivo intercettata dal modo laser)

abbiamo

$$\tilde{q} = \frac{A_e}{d} \frac{V_c}{d} [x + 1]$$

$$\tilde{q} = \frac{A_e}{d} \frac{V_c}{d} \frac{P_p}{P_{th}} + 1$$

Fin qui abbiamo fatto in conti per il caso stazionario di un laser a 4 livelli.

Con conti del tutto analoghi si tratta il caso stazionario di un laser a 3 livelli :

$$\dot{N} = w_p (N_{tot} - N) - 2 B q N - \frac{N_{tot} + N}{d}$$

$$\dot{q} = \frac{V_a}{d} B N - \frac{1}{d} q$$

$$0 = w_p (N_{tot} - N) - 2 B q N - \frac{N_{tot} + N}{d}$$

$$0 = \frac{V_a}{d} B N - \frac{1}{d} q$$

Con conti analoghi a quelli fatti per il laser a 4 livelli, si trova che la popolazione del livello laser superiore (che però in questo caso non coincide con l'inversione di popolazione) è :

$$\tilde{N} = N_c$$

mentre il numero di elettroni nel modo laser *in condizioni stazionarie* è (fare conti...) :

$$\tilde{q}^{(3)} = \frac{V_a (N_{tot} + \tilde{N})}{2d} [x + 1]$$

che possiamo mettere a confronto con quella ottenuta per il laser a 4 livelli :

$$\tilde{q}^{(4)} = V_a \frac{\tau_c}{\tau} \tilde{N} [x \ll 1].$$

\* Esempio numerico con un laser a Nd-YAG

(26' 20")

Facciamo un esempio numerico per un laser Nd-YAG in continua (cw)

Ipotizziamo per il laser questi parametri :

$$A_e = 0.5 \text{ mm}^2 \quad (\text{area che il modo laser intercetta nel mezzo attivo})$$

$$\tau = 0.12$$

$$\sigma = 3.5 \times 10^{-19} \text{ cm}^2 \quad (\text{sezione d'urto della transizione laser})$$

$$\tau = 0.23 \text{ ms} \quad (\text{vita media del livello laser superiore})$$

$$L' = 50 \text{ cm} \quad (\text{lunghezza effettiva della cavit\`a})$$

$$\tau_c = 14 \text{ ns} \quad (\text{vita media dei fotoni in cavit\`a})$$

Con tutti questi valori, se si fanno i conti si ottiene :

$$\tilde{q} \approx 10^{11} \frac{P_p}{P_{th}} \ll 1$$

per cui se mandiamo una radiazione di pompa con potenza appena il 10% superiore alla potenza critica, il numero di fotoni \`e

$$\tilde{q} \approx 10^{11} \frac{1.1 P_{th}}{P_{th}} \ll 1$$

$$\tilde{q} \approx 10^{11} (1.1 \ll 1)$$

$$\tilde{q} \approx 10^{10}$$

che \`e un numero rilevante!.

Nota Bene : questo \`e un 'numero di fotoni presenti in cavit\`a'. Tra l'altro si ottiene

imponendo la stazionarietà, cioè imponendo che i fotoni prodotti uguagliano i fotoni persi dalla cavità.

Questo risultato ci porta concludere che è lecito approssimare l'espressione 'corretta' che tiene conto dell'emissione spontanea, con la teoria della seconda quantizzazione

$$V_a B (q+1) N_2$$

con quella che abbiamo usato noi

$$V_a B q N_2.$$

- **Potenza in uscita del laser**

Fin'ora abbiamo studiato cosa succede all'interno della cavità.

Chiediamoci adesso quanti fotoni escono dalla cavità dallo specchio 2.

Cominciamo a scrivere la potenza che viene immessa nel modo laser all'interno della cavità.

La potenza è energia per unità di tempo.

L'energia la possiamo scrivere come energia del singolo fotone per il numero di fotoni.

Per avere la potenza dobbiamo avere il numero di fotoni emessi nell'unità di tempo. Noi abbiamo il numero di fotoni immessi dopo un round trip  $\tilde{q}$ , e dunque se dividiamo per la durata temporale di un round trip ([vedi](#)) abbiamo il numero medio di fotoni immessi per unità di tempo.

Dunque utilizziamo una potenza media su un round trip.

La potenza che viene emessa è dunque pari al numero di fotoni 'immessi nel modo laser' dopo un round trip  $\tilde{q}$ , diviso per il tempo del round trip moltiplicato per l'energia del singolo fotone  $h\nu$ , e moltiplicato per il fattore di riflettività dello specchio di uscita  $\mathcal{R}_2$  (facciamo l'ipotesi che lo specchio posteriore abbia riflettività infinita) :

$$P_2 = \frac{\mathcal{R}_2 c}{2 L'} h \nu \tilde{q}.$$

Sostituendo le due espressioni di  $\tilde{q}$  per il caso a tre livelli e a quattro livelli rispettivamente si ha :

$$P_2^{(4)} = \frac{\rho_b c}{2 L'} h \nu_a \frac{\rho_c}{\rho} \tilde{N} [x \ll 1]$$

$$P_2^{(3)} = \frac{\rho_b c}{2 L'} h \nu_a (N_{\text{tot}} + \tilde{N}) \frac{\rho_c}{2 \rho} [x \ll 1].$$

Facendo un pò di conti si può far comparire in queste formule l'*intensità di saturazione*  $I_s$  che abbiamo trovato studiando il sistema con solo due livelli ([vedi](#)) :

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \frac{\rho_b}{2} [x \ll 1]$$

$$P_2^{(3)} = \frac{V_a (N_{\text{tot}} + \tilde{N}) h \nu_a}{2 \rho} \frac{\rho_b}{2 \rho} [x \ll 1].$$

dove l'intensità di saturazione è

$$I_s = \frac{h \nu_a}{\rho t}.$$

Se grafichiamo questa potenza in uscita  $P_2$  in funzione della potenza di pompa avremo potenza in uscita nulla per valori di pompa inferiori alla potenza di soglia  $P_{\text{th}}$ , e poi un andamento lineare.

A questo proposito è utile definire l'efficienza del laser, come la derivata della potenza in uscita rispetto alla potenza di pompa :

$$\rho_s = \frac{d P_2}{d P_p}$$

facendo i conti, per un laser a 4 livelli si ha

$$\rho_s^{(4)} = \frac{A_e I_s \rho_b}{2 P_{\text{th}}}$$

mentre per uno a tre livelli :

$$\rho_s^{(3)} = V_a (N_{\text{tot}} + \tilde{N}) \frac{h \nu_a \rho_b}{2 \rho 2 \rho}.$$

Scriviamo adesso l'efficienza in un altro modo, per mettere in evidenza certe cose.

Partiamo dall'espressione

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \frac{\eta_b}{2} [X \eta 1]$$

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \frac{\eta_b}{2} \frac{P_2}{P_{th}} \eta 1$$

dove ricordiamo che

$$I_s = \frac{h \eta}{\eta t}$$

è l'intensità di saturazione, mentre  $A_e$  (area efficace) è pari alla sezione del fascio

$A_e = \frac{\eta w_0^2}{4}$  ( $w_0 = \text{waist}$ ) ovvero alla sezione di mezzo attivo attraversato dal fascio.

Derivando  $P_2$  si ha l'efficienza :

$$\eta = A_e I_s \frac{\eta_b}{2} \frac{1}{P_{th}}$$

Adesso andiamo a richiamare il concetto di efficienza di pompa introdotta all'inizio della trattazione del laser ([vedi](#)) :

$$\eta_p = \frac{w_p N_0 V h \eta_p}{P}$$

Se ci mettiamo in condizioni di soglia compariranno la potenza di soglia e il rate di pompa critico :

$$\eta_p = \frac{w_{c p} N_0 V h \eta_p}{P_{th}}$$

da cui :

$$\frac{1}{P_{th}} = \frac{\eta_p}{w_{c p} N_0 V h \eta_p}$$

Se ora ricordiamo che  $V$  è il volume del mezzo attivo, e dunque  $V = A l$ , dove  $l$  è la lunghezza del mezzo attivo, e ricordiamo che  $w_{cp} = \frac{h \nu_p}{l N_{tot}}$ , possiamo scrivere l'efficienza 'totale' del laser come :

$$\eta_{compl} = A_e \cdot \frac{h \nu}{h \nu_p} \cdot \frac{\nu_b}{2 \nu} \cdot \frac{\nu_p}{w_{cp} N_0 V h \nu_p}$$

$$\eta_{compl} = \frac{A_e}{A} \cdot \frac{h \nu}{h \nu_p} \cdot \frac{\nu_b}{2 \nu} \cdot \eta_p$$

$$\eta_{compl} = \eta_A \cdot \eta_q \cdot \eta_c \cdot \eta_p$$

e dunque abbiamo espresso l'efficienza complessiva del laser come prodotto di varie efficienze :

- $\eta_A$  efficienza di 'illuminazione del mezzo attivo'
- $\eta_q$  efficienza quantistica (efficienza di conversione del fotone di pompa nel fotone laser)
- $\eta_c$  efficienza di accoppiamento con l'esterno
- $\eta_p$  efficienza di pompa.

\* accoppiamento d'uscita

Sviluppiamo adesso il concetto di accoppiamento con l'esterno.

La potenza d'uscita del laser è funzione della riflettività dello specchio 2 :

$$P_2 = f(\nu_b) = f(\nu \ln R_2)$$

La riflettività dello specchio ha effetti contrastanti sulla potenza d'uscita :

\* diminuendo la riflettività più fotoni possono uscire, e dunque la potenza aumenta

\* ma diminuendo la riflettività diminuisce il numero di fotoni nel modo laser :

$$\tilde{q}^{(4)} = V_a \frac{\nu_c}{\nu} \tilde{N} [x \ll 1]$$

(comparare la vita media dei fotoni in cavità, che diminuisce al diminuire della riflettività).

Dunque esisterà una riflettività ottimale, che ci proponiamo di trovare.

Per trovare la riflettività ottimale imponiamo che la potenza in uscita in funzione di  $\rho$  sia massima, ovvero imponiamo che si annulli la derivata :

$$\frac{d P_2}{d \rho} = 0.$$

Facendo i conti per il laser a 4 livelli si ha :

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \frac{\rho}{2} \frac{P_p}{P_{th}} \left[ 1 - \frac{\rho}{P_{th}} \right]$$

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \frac{\rho}{2} \frac{w_p}{w_{cp}} \left[ 1 - \frac{\rho}{w_{cp}} \right]$$

ma bisogna esplicitare  $w_{cp}$ , perché contiene  $\rho$  :

$$w_{cp} = \frac{N_c}{N_{tot} - N_c} \frac{1}{\rho}$$

$$w_{cp} \rho = \frac{N_c}{N_{tot}} \frac{1}{\rho}$$

$$w_{cp} \rho = \frac{1}{\rho d N_{tot}}$$

e ricordando che

$$\rho = \rho_i + \frac{\rho + \rho_b}{2}$$

si ha

$$w_{cp} = \frac{\rho_i + \frac{\rho + \rho_b}{2}}{\rho d N_{tot}}$$



Se ora definiamo il 'rate di pompa critico in corrispondenza di una riflettività infinita dello specchio 2' :

$$W_{cp}^* = \frac{\Gamma_1 + \frac{\Gamma_2}{2}}{\Gamma d} \frac{1}{N_{tot}} \frac{1}{\Gamma}$$

definiamo inoltre (per comodità nel seguito) la quantità

$$S = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + 2\Gamma}$$

Tornando adesso alla potenza in uscita :

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \frac{\Gamma_2}{2} \frac{\Gamma W_p}{\Gamma \Gamma} \Gamma d N_{tot} \Gamma \Gamma \frac{1}{\Gamma}$$

e con le posizioni fatte

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \left[ \frac{\Gamma_1}{\Gamma} + \frac{\Gamma_2}{2\Gamma} \cdot S \cdot \frac{\Gamma W_p}{\Gamma W_{cp}^*} \frac{1}{S+1} \right] \frac{1}{\Gamma}$$

$$P_2^{(4)} = A_e I_s \left[ \frac{\Gamma_1}{\Gamma} + \frac{\Gamma_2}{2\Gamma} \cdot S \cdot X_{min} \frac{1}{S+1} \right] \frac{1}{\Gamma}$$

dove abbiamo introdotto  $X_{min}$ .

In questo modo abbiamo raggruppato tutta la dipendenza da  $\Gamma_2$  dentro  $S$ .  
A questo punto derivare rispetto a  $\Gamma_2$  equivale a derivare rispetto a  $S$  :

$$\frac{d P_2}{d \Gamma_2} = 0 \quad \Gamma \quad \frac{d P_2}{d S} = 0.$$

Facendo i conti si ottiene :

$$S_{opt} = \sqrt{\frac{W_p}{W_{cp}^*}} \Gamma 1$$

che si può scrivere anche in funzione delle  $\Gamma$  per trovare la riflettività ottimale :

$$S_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2 w_p \sigma d N_{\text{tot}}}{2 \alpha + \alpha_1}} \approx 1$$

d'altra parte, ricordando la definizione di S

$$S = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + 2 \alpha}$$

si ha

$$S_{\text{opt}} = \frac{\alpha_{2 \text{ opt}}}{2 \alpha + \alpha_1}$$

da cui uguagliano

$$\frac{\alpha_{2 \text{ opt}}}{2 \alpha + \alpha_1} = \sqrt{\frac{2 w_p \sigma d N_{\text{tot}}}{2 \alpha + \alpha_1}} \approx 1$$

$$\alpha_{2 \text{ opt}} = (2 \alpha + \alpha_1) \sqrt{\frac{2 w_p \sigma d N_{\text{tot}}}{2 \alpha + \alpha_1}} \approx 1.$$

Ricordiamo che i coefficienti di perdita  $\alpha$  dipendono (logaritmicamente) dalle riflettività ([vedi](#)).

In corrispondenza di questa riflettività avremo la massima potenza in uscita, o potenza ottimale.

Come al solito facciamo un esempio numerico per renderci conto degli ordini di grandezza.

Consideriamo un laser Nd YAG in continua.

I parametri di questo laser sono :

$$\lambda = 1.06 \text{ } \mu\text{m} \quad \text{lunghezza d'onda}$$

$$\tau = 230 \text{ } \mu\text{s} \quad \text{vita media del livello laser superiore}$$

$$\sigma = 3.5 \times 10^{-19} \text{ cm}^2 \quad \text{sezione d'urto della transizione laser}$$

$$L = 50 \text{ cm} \quad \text{lunghezza della cavità}$$

$A_e \approx A = 0.31 \text{ cm}^2$  sezione del mezzo attivo, coincidente con l'area illuminata

$R_1 = \infty$  raggio di curvatura del primo specchio

$R_2 = 5 \text{ m}$  raggio di curvatura del secondo specchio

$T_1 = 0$  trasmittività del primo specchio

$T_2 = 0.15$  trasmittività del secondo specchio

Cominciamo a calcolare i due coefficienti  $g_1$  e  $g_2$  per valutare la stabilità della cavità :

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} = 1$$

$$g_2 = 1 - \frac{0.5}{5} = 0.9$$

$$g_1 g_2 = 0.9 < 1$$

e dunque la cavità è stabile.

A questo punto immaginiamo di accendere la lampada di pompa, e di aumentarne man mano la potenza  $P_p$ , e di rilevare la corrispondente potenza  $P_2$  emessa dal laser.

Un grafico di questo andamento è mostrato nella figura a pag 502 : al di sotto della potenza di soglia  $P_{th}$  non c'è potenza in uscita, mentre al di sopra abbiamo un andamento abbastanza lineare (se ci teniamo bassi con la potenza).

In realtà sperimentalmente avremo solo una serie di punti, di cui faremo un fit. Allora sperimentalmente possiamo (con un'extrapolazione) stimare la potenza di soglia, e la pendenza dell'andamento lineare, che rappresenta l'efficienza del laser.

Dai dati sperimentali si ottiene :

$$P_2 = 53 \left[ \frac{P_p}{P_{th}} - 1 \right]$$

da cui si ricava una stima sperimentale della potenza di soglia di :

$$P_{th} \approx 2.2 \text{ kW}$$

e un'efficienza di

$$\eta_s \approx 2.4 \%$$

Adesso la questione è manipolare un pò le formule 'teoriche' che abbiamo visto fin'ora, per confrontare questi risultati sperimentali con la teoria.

Ricordiamo che l'espressione della potenza di emissione che abbiamo trovato è

$$P_2 = A_e I_s \frac{\eta_b}{2} \frac{P_p}{P_{th}} \approx 1 \left[ \right]$$

Ora, di questa formula 'conosciamo' i parametri fuori della parentesi, tutti esprimibili tramite i 'parametri della cavità' in nostro possesso, e quindi possiamo dare una 'previsione teorica' del coefficiente fuori della parentesi quadra, che è di 58.

Quello che abbiamo difficoltà a ricondurre ai parametri 'misurabili' sono la potenza di soglia e l'efficienza.

Un'espressione per la potenza di soglia che esce dalla teoria è :

$$P_{th} = \frac{\eta}{\eta_p} \frac{h \nu_p}{h \nu} A I_s.$$

Da questa formula abbiamo problemi a 'tirare fuori' le perdite  $\eta$  (quelle legate all'assorbimento e alla diffrazione), e l'efficienza  $\eta_p$ .

Vogliamo studiare un modo per stimare  $\eta$ .

Cominciamo col ricordare che

$$\eta = \eta_i + \frac{\eta_a + \eta_b}{2}$$

lo possiamo approssimare con

$$\eta \approx \eta_i + \frac{\eta_b}{2}$$

perché abbiamo detto che la riflettività dello specchio 1 (specchio posteriore, back reflector) è (circa) 1.

Ciò posto

$$P_{th} = \frac{2\alpha + \alpha_2}{2\alpha_p} \frac{h\nu_p}{h\nu} A I_s$$

da cui, esplicitando  $\alpha_2$ :

$$\alpha \frac{\ln R_2}{2} = \alpha_p \frac{h\nu}{h\nu_p} \frac{P_{th}}{A I_s} \alpha \alpha_i$$

dove ricordiamo che  $R_2 = (1 - a_2 - T_2) \alpha (1 - T_2)$

Ma questa è l'equazione di una retta, se grafichiamo  $-\ln R_2$  in funzione della potenza di soglia  $P_{th}$ .

Per avere dei punti sperimentali e graficare questa retta dobbiamo avere a disposizione vari specchi, con diverse riflettività.

Per ognuno riportiamo la potenza di soglia, e quindi tracciamo i punti su un piano  $-\ln R_2$   $P_{th}$  e ne facciamo un fit.

L'intercetta (ordinata all'origine) è  $\alpha$ .

Trovato  $\alpha$  si può stimare  $\alpha_p$  (efficienza di pompaggio).

È interessante stimare l' "accoppiamento migliore", cioè il  $\alpha_2$  ottimale.

Per i dettagli vedere a pag 503.

- Comportamento dinamico del laser (solo cenni)  
(48' 10")

Il laser, prima di raggiungere il comportamento in regime stazionario che abbiamo studiato adesso, ha un regime transitorio, in cui la popolazione del livello superiore oscilla, per poi assestarsi sul valore 'stazionario'.

Noi non studieremo il regime transitorio.

- mode competition  
(51' 23")

Consideriamo un laser 'multimodo' in termini longitudinali.

In altre parole consideriamo un laser nella cui cavità oscillano diversi modi longitudinali.

Immaginiamo di rivelare la potenza in uscita.

Se andiamo a vedere il segnale, con un oscilloscopio abbastanza veloce, al di là del rumore potremmo vedere che ci sono diverse oscillazioni che interferiscono.

Infatti le fasi dei campi dei diversi modi sono scorrelate, poiché ogni modo può in linea di principio partire indipendentemente, cioè in tempi diversi (vedi figura a pag 512).

Dunque l'intensità media è la somma delle intensità dei singoli modi.

Tuttavia, a causa dell'interferenza, ci possono essere degli istanti in cui l'intensità ha dei picchi, a causa dell'interferenza costruttiva, e anche delle interruzioni, a causa dell'interferenza distruttiva.

Comunque questi effetti (spikes positivi o negativi) sono casuali.

Altro fatto (55' 49") : se ho molti modi che stanno oscillando contemporaneamente, ce ne sono alcuni favoriti? ognuno oscilla 'per fatti suoi', o c'è una 'competizione'?

Dobbiamo considerare due casi diversi, a seconda che la larghezza di riga della transizione laser è allargata omogeneamente (curva lorentziana) oppure inomogeneamente (curva gaussiana).

In entrambi i casi immaginiamo di partire da un valore di pompa sotto soglia, e di aumentarlo progressivamente.

Nel primo caso si ha che quando siamo sopra soglia, il modo che capita sotto il massimo della curva di guadagno (riga di emissione della transizione laser) è più favorito (il guadagno è massimo, appunto).

Nel secondo caso, abbiamo una curva diversa (curva Voigt, con 'tante classi di omogeneità').

In questo caso il modo centrale 'scava un buco' della curva di guadagno quando saliamo sopra soglia (saturazione).

È una cosa che abbiamo visto quando abbiamo studiato le tecniche di rivelazione subdoppler (vedi).

In questo caso potrebbero diventare favoriti i modi laterali, e non più quello centrale.

Questo ha fatto pensare alla gente, fino a un certo periodo, che i laser con allargamento omogeneo non soffrissero della competizione tra modi, essendo molto favorito il modo centrale, perché non si possono 'scavare buchi' nel profilo omogeneo.

(aggiunta mia : ricorda ce l'allargamento omogeneo si ha proprio quando 'tutti gli atomi sono uguali', mentre l'allargamento inomogeneo si ha quando gli atomi sono diversi tra loro)

In realtà si è scoperto che anche i laser con allargamento omogeneo presentano problemi di competizione di modi.

Questo è dovuto a 'salti' non tanto nel dominio delle frequenze, ma 'per fattori geometrici'.

Spieghiamo meglio.

Consideriamo un certo modo, diciamo il modo favorito, quello che sta sotto il massimo della curva di guadagno. In generale questo modo forma un'onda stazionaria, e dunque ci saranno dei ventri e dei nodi.

Il mezzo attivo è quasi del tutto non sfruttato nelle zone in cui capitano i nodi.

Consideriamo ora un altro modo, che in generale avrà un'altra fase : in corrispondenza dei nodi del primo modo questo può 'sfruttare' il mezzo attivo, e dunque può 'laserare'.

Un modo per ovviare a questo problema è di evitare che i modi nella cavità formino onde stazionarie, ma onde viaggianti.

### • Laser pulsati

(1h 03' 30")

Vogliamo realizzare un laser che non emette continuamente radiazione, ma solo degli impulsi, con un certo ritmo.

I vantaggi sono due :

a) possiamo eccitare un sistema con tempi molto brevi, comunque molto minori dei tempi di rilassamento del sistema, in modo da poterne poi studiare il rilassamento 'libero'. In questo modo possiamo studiare i sistemi nel dominio dei tempi, e non solo nel dominio delle frequenze come abbiamo fatto fin'ora.

b) Si possono ottenere potenze molto elevate, concentrando energie non esagerate in intervalli di tempo molto piccoli.

Con un impulso già della potenza di 100 mJoule si possono investigare i comportamenti non lineari dei mezzi.

Facendo due conti (vedi pag 514) si vede che i campi elettrici diventano confrontabili con i campi coulombiani che gli elettroni vedono nell'atomo a causa del nucleo.

- Tecniche per realizzare laser pulsati -

- modulazione esterna

\* Un primo metodo è quello di usare un laser cw, e un chopper (pale rotanti) per 'tagliare' il fascio.

Ma con questo metodo non si possono avere frequenze degli impulsi abbastanza

alte, o durate degli impulsi abbastanza basse (ad es. del picosecondo).

\* Altro metodo è quello di utilizzare dei dispositivi che possono deviare la radiazione 'a comando'. Ci sono due tipi di dispositivo.

Il primo (acustooptico) è basato sulla creazione di un 'reticolo di diffrazione' temporaneo 'comunicando' vibrazioni meccaniche ad un mezzo trasparente. o modulando un campo elettrico.

Il secondo (elettroottico) è basato sul conferire o meno proprietà di birifrangenza ad un cristallo, immergendolo in un campo elettrico.

In entrambi i casi questi dispositivi possono deviare 'a comando' la radiazione. (celle di Pockels, celle di Kerr)

Riguardo alla modulazione elettroottica, il prof accenna al fatto che alcuni mezzi presentano birifrangenza in presenza di campi elettrici.

La casa costruttrice specifica a quale tensione il cristallo si comporta come una lamina a  $\lambda/2$  o a  $\lambda/4$  (questi temi sono approfonditi a parte).

Mandando un'onda quadra, opportunamente amplificata, possiamo rendere birifrangente questa 'cella' con una certa frequenza, deviando o non deviando il laser, realizzando un fascio impulsato con 'rates' e durate degli impulsi rispettivamente abbastanza alte e bassi.

L'altra possibilità, la modulazione acustooptica, consiste nel mettere in vibrazione un cristallo piezoelettrico con un campo a radiofrequenza.

Se si accoppia meccanicamente questo piezoelettrico ad un mezzo trasparente, si creano delle onde (stazionarie o viaggianti), che comprimono e rilassano diverse zone (bande) del mezzo, realizzando un reticolo.

- Modulazione interna

Fin qui abbiamo visto tutti metodi che usano un laser che comunque emette 'in continua' (cw) e la cui radiazione emessa viene in un secondo momento resa 'impulsata'.

Parliamo più propriamente di modulazione della luce.

Questo non è di nessun aiuto per realizzare impulsi di alta potenza con energie basse, perché la radiazione laser viene comunque prodotta in continua.

Vediamo adesso come si può realizzare un laser 'intrinsecamente impulsato'.

Un primo metodo che viene in mente è quello di modulare la pompa.

Usando una lampada 'a flash' si realizza solo ad intervalli l'inversione di popolazione, e dunque solo ad intervalli verrà emessa radiazione laser.

Noi ci soffermeremo su altre due tecniche che invece si basano su un altro 'trucco', e cioè quello di '*modulare le perdite*'.

Questi due metodi sono :



a) Q - switching

b) Mode - locking

Cominciamo con il Q - switching.

Ricordiamo che le perdite di una cavità sono descritte dal suo *fattore di merito* ([vedi](#)) che è per definizione il rapporto tra l'energia immagazzinata e l'energia persa per ogni ciclo.

Dunque più il fattore di merito è elevato, minori sono le perdite della cavità.

Abbiamo anche visto che data una cavità laser, esiste una 'inversione di popolazione critica'  $N_c$ , che poi abbiamo visto rimane la stessa anche quando con la pompa andiamo sopra la soglia, in regime stazionario ( $\tilde{N} = N_c$ ).

L'espressione di questa inversione di popolazione è ([vedi](#))

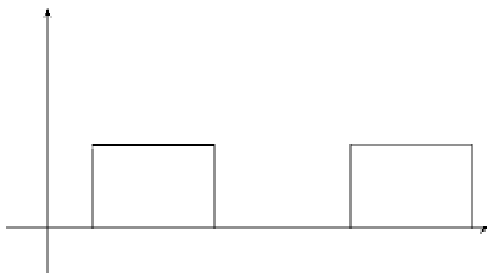
$$N_c = \frac{\gamma}{\sigma d}$$

Dunque le perdite  $\gamma$  fissano l'inversione di popolazione!

Sia  $\tau$  la vita media del livello laser superiore.

Facciamo inoltre in modo di poter (rapidamente) cambiare il valore delle perdite della cavità, passando da un certo valore alto  $\gamma_{\text{alto}}$  ad un altro valore basso  $\gamma_{\text{basso}}$ .

Immaginiamo di 'accendere' la pompa per un intervallo di tempo  $\tau_w$  minore delle vita media  $\tau$  del livello alto.



Immaginiamo inoltre che durante questi intervalli in cui la pompa è accesa facciamo in modo che le perdite della cavità siano elevate ( $\gamma_{\text{alto}}$ ).

In questo modo succede che l'inversione di popolazione sale ad un valore molto alto, molto più alto del caso in cui le perdite sono accettabili ( $\gamma_{\text{basso}}$ ).

Facendo in questo modo, quando poi rendiamo le perdite della cavità basse, il livello laser alto avrà una popolazione molto elevata, molto più elevata (a parità di pompa) che non se avessimo tenuto tutto costante (cavità stazionaria).

Durante questo tempo in cui le perdite sono basse possiamo anche spegnere la

pompa, sfruttando l'inversione di popolazione realizzata nella fase precedente.

Per rendere un pò quantitative le cose introduciamo alcuni parametri :

$N_i$  inversione di popolazione raggiunta con le perdite alte

$a \equiv \frac{N_i}{N_c}$  parametro che dice quanto più in alto della inversione di popolazione critica siamo andati

$t_p = \frac{2cQ}{L} \frac{a}{a-1}$  durata dell'impulso laser che si riesce a realizzare

(in realtà è l'intervallo tra quando comincia l'impulso e quando raggiunge il massimo).

Qui  $L$  è la lunghezza della cavità e  $Q$  è il fattore di merito della cavità quando le perdite sono basse (credo).

Il motivo per cui vogliamo che la durata della fase di 'ripopolamento rinforzato', ovvero la fase in cui le perdite sono alte e la pompa è attiva sia più piccola della vita media del livello laser alto è che non vogliamo perdere atomi per emissione spontanea.

In altre parole vogliamo ottenere la massima inversione di popolazione possibile, prima che cominciamo a perdere atomi.

Notiamo che questa eventuale emissione spontanea non riuscirebbe comunque a innescare produzione laser perché le perdite sono troppo grandi.

\* cavity damping

Esiste un'altro modo per realizzare il Q-switching, in cui  $\tau_w$  (tempo in cui la pompa è accesa) può anche essere maggiore di  $\tau$  (vita media del livello laser superiore).

In questa tecnica si realizza una cavità in cui le perdite sono in generale molto piccole (tutti e due gli specchi sono altamente riflettenti), cioè una cavità con fattore di merito molto alto.

In questo modo dentro la cavità si accumulano molti elettroni.

Poi, per tempi brevi, si deve trovare il modo di fare uscire questi fotoni.

Dunque questa tecnica è in qualche modo inversa alla precedente : qui le nella 'fase di accumulazione' le perdite sono basse, e si accumulano fotoni in cavità, poi nella fase di emissione si fanno 'perdere' i fotoni, alzando appunto le perdite.

Realizzazione pratica

Un metodo molto semplice per variare il fattore di merito, cioè le perdite, è far ruotare (molto velocemente) uno dei due specchi su un asse che passa per il suo centro (vedi figura a pag 518).

Solo nell'istante in cui i due specchi sono paralleli la cavità ha perdite piccole.

Questo metodo è abbastanza difficile da realizzare, perché è difficile tenere allineata la cavità, con questo coso che gira a grande velocità (precessione).

Un metodo più praticabile è quello di mettere un cristallo elettroottico (cella di Pockels, con cristallo KDP) o acustoottico all'interno della cavità.

La cella con l'acustoottico o l'elettroottico l'abbiamo già vista, e il metodo consiste semplicemente nel deviare il fascio per portarlo fuori dalla cavità.

Un altro metodo (ma non ho capito bene se è un altro metodo, o è uno di questi due. Forse questa che segue è la descrizione della cella di Pockels).

Consideriamo un cristallo elettroottico, che diventa birifrangente 'a comando' (applicandogli una tensione). Scegliamo la tensione da applicare tale che il cristallo si comporti come una lamina a  $1/4$  d'onda.

Mettiamo nella cavità questo, insieme a una lamina polarizzatrice, tra uno specchio e il mezzo attivo, con la lamina polarizzatrice tra il mezzo attivo e il cristallo birifrangente (vedi figura a pag 519).

In questo modo la luce prima passa per il polarizzatore e quindi diventa polarizzata linearmente; poi passa per il cubetto birifrangente e diventa polarizzata circolarmente; poi si riflette sullo specchio, e ripassa nel cubetto, polarizzandosi linearmente, ma lungo una direzione a  $90^\circ$  rispetto a come era entrata (possiamo dire che due passaggi attraverso una lamina a  $\pi/4$  equivalgono a un passaggio attraverso una lamina a  $\pi/2$ ).

In questo modo la luce viene (quasi) bloccata dal polarizzatore. In definitiva, quando applichiamo la tensione la luce vede molte perdite (assorbimento dalla lamina polarizzatrice).

Spegnendo la tensione le perdite sono invece basse.

- metodi passivi

Tutti questi metodi si possono definire 'attivi'.

Esiste un metodo definito 'passivo', che consiste nel mettere un *assorbitore saturabile* nella cavità.

Si tratta di un mezzo che assorbe radiazione, ma questo processo di assorbimento finisce quando arriva ad una saturazione (diventa trasparente).

Fin tanto che non si è saturato, questo mezzo causa forti perdite alla radiazione. Quando arriva alla saturazione la perdita scompare, e dunque si ha l'impulso laser.

Il problema di questi mezzi è che 'si usurano', e quindi devono essere rimpiazzati di tanto in tanto.

- Mode - locking

Un altro modo per produrre radiazione laser impulsata è il mde-locking.

Consideriamo un laser che può oscillare su un numero molto elevato di modi longitudinali, diciamo  $2N+1$ .

Se vogliamo avere un laser monocromatico questo è un problema.

Sia  $\omega_0$  la frequenza (pulsazione) del modo centrale (quello sotto il massimo della curva di guadagno), e sia  $\Delta\omega$  la sperarazione tra i modi longitudinali (free spectral range espresso 'in pulsazione').

Usiamo un'etichetta intera  $l$  per chiamare i modi, con  $l$  che va da  $-N$  a  $N$ . Scriviamo il campo associato al modo  $l$ -esimo :

$$\begin{aligned} E_l &= E_0 e^{i(\omega_l t + \phi_l)} \\ &= E_0 e^{i(\omega_0 + l \Delta\omega) t} e^{i\phi_l} \end{aligned}$$

Il campo 'totale', associato a tutta la radiazione laser sarà la somma dei campi associati ai singoli modi :

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \sum_{l=-N}^N E_0 e^{i\omega_0 t} e^{il\Delta\omega t} e^{i\phi_l} \\ E_{\text{tot}} &= E_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{l=-N}^N e^{il\Delta\omega t} e^{i\phi_l} . \end{aligned}$$

Adesso facciamo un'ipotesi, che sta alla base di questo metodo. Facciamo l'ipotesi che la differenza di fase tra i modi è costante :

$$\phi_l - \phi_{l+1} = \text{costante}.$$

Da questa posizione viene il nome del metodo (fase bloccata).

Vedremo poi come è possibile realizzare tecnicamente questa situazione.

Questa ipotesi è anche quella che abbiamo descritto in quell'esempio dei radiotelescopi (vedi).

Poniamo infine  $\phi_0 = 0$ .

Con queste posizioni il campo totale diventa :

$$E_{\text{tot}} = E_0 e^{i\phi_0 t} \sum_{l=-N}^N e^{i l \phi t} e^{i l \phi}$$

e, ponendo

$$A(t) = E_0 \sum e^{i l (\phi t + \phi)}$$

abbiamo

$$E_{\text{tot}} = e^{i\phi_0 t} A(t)$$

a questo punto facciamo un cambio di variabile :

$$\phi t + \phi = \phi t'$$

(cioè riscaldiamo i tempi)

e dunque

$$A(t') = E_0 \sum e^{i l \phi t'}$$

e, sommando la serie ([serie geometrica](#)) si ha :

$$A(t') = E_0 \frac{\sin \left[ (2N+1) \frac{\phi t'}{2} \right]}{\sin \left[ \frac{\phi t'}{2} \right]}$$

(è lo stesso conto che si fa per il reticolo di diffrazione).

Per fare un paragone con il reticolo, possiamo dire che qui stiamo vedendo l'interferenza tra diverse sorgenti che hanno una differenza di fase non dovuta a 'motivi spaziali' (diversi cammini ottici) ma a una 'distanza nel tempo'.

Consideriamo adesso il quadrato dell'ampiezza, che è proporzionale all'intensità della radiazione :

$$A^2(t') = E_0^2 \frac{\sin^2(2N+1) \frac{\omega t'}{2}}{\sin^2 \frac{\omega t'}{2}} .$$

Questa funzione è la solita funzione di diffrazione, con dei massimi principali e dei massimi secondari ([vedi](#)) (vedi figura a pag 522).

Riguardo i massimi, facendo dei conti 'noti' (ad esempio struttura, nella trattazione dell'interazione radiazione - materia ([vedi](#))) (si deriva con la regola dell'Hopital e...) scopriamo che la condizione per i massimi è

$$\frac{\omega t'}{2} = \pi$$

per la quale si ha

$$\frac{\sin(2N+1)\pi}{\sin \pi}$$

e dunque i massimi si hanno per tempi che sono multipli di :

$$\begin{aligned} t'_{max} &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{2\pi\nu} \quad (\text{passiamo dal FSR 'in pulsazione' al FSR vero e proprio}) \\ &= \frac{2L}{c} \end{aligned}$$

che è il 'round trip', ( $L$  è la lunghezza della cavità).

In corrispondenza di questi tempi dunque si hanno i massimi (principali) dell'intensità.

Dunque questo è il tempo tra un impulso e l'altro.

La frequenza di ripetizione, ossia la frequenza con cui vengono emessi gli impulsi, è per definizione l'inverso di questo intervallo di tempo tra gli impulsi.

Concludendo, la frequenza di ripetizione degli impulsi è pari al FSR della cavità!

Calcoliamo adesso l'intensità degli impulsi. L'intensità è proporzionale al quadrato del campo, e quindi vale :

$$A_{max}^2 = (2N+1)^2 E_0^2$$

che è dunque il quadrato del numero totale dei modi per l'intensità del singolo modo.

Osserviamo che se la differenza di fase fosse stata casuale avremmo avuto un'interferenza con media nulla, cioè senza questi massimi principali.

Osserviamo che non c'è nessuna modulazione, ma c'è solo una differenza di fase costante.

Questa differenza di fase costante fa sì che in emissione abbiamo un treno di impulsi anziché un fascio continuo (i massimi principali) separati temporalmente di  $2L/c$  (che è il tempo del round trip).

Cerchiamo adesso la *larghezza (nel tempo) dei picchi* (impulsi), ossia la loro durata. La definiamo come il tempo che intercorre tra i due minimi che delimitano questi massimi (massimi principali).

Studiando le derivate si ha che i tempi per cui si hanno i primi minimi sono dati dalla condizione :

$$\frac{(2N+1)\pi t'}{2} = \pi$$

$$t' = \frac{2\pi}{(2N+1)\pi}$$

$$t' = \frac{1}{2N+1} \frac{2L}{c}$$

Questa è la posizione del primo minimo sull'asse dei tempi, dove abbiamo fatto capitare l'origine in corrispondenza di un massimo principale.

Dunque questa rappresenta una semilarghezza dell'impulso nel dominio dei tempi, ovvero una 'semidurata'.

Tuttavia questa è una semilarghezza misurata 'da minimo a minimo'.

Se invece vogliamo la larghezza 'a metà altezza', allora è proprio

$$\tau_p = \frac{1}{2N+1} \frac{2L}{c} \quad (\text{durata dell'impulso}).$$

Vediamo che questa durata è inversamente proporzionale al numero totale di modi. Dunque più sono i modi che oscillano contemporaneamente (purché con differenza di fase costante) più sono stretti gli impulsi!

Osserviamo inoltre che questa durata si può vedere come l'inverso della larghezza in frequenza della banda di emissione della transizione laser (curva di guadagno), perché al denominatore abbiamo il FSR (distanza in frequenza tra due modi) moltiplicato per il numero totale di modi :

$$\tau_p = \frac{1}{(2N+1) \Delta \nu_{\text{FSR}}}$$

$$\tau_p = \frac{1}{\Delta \nu_{\text{gain}}}.$$

Vediamo un paio di esempi :

laser Nd YAG

la larghezza della curva di guadagno è di 100 GHz  $\Rightarrow \tau_p = 10 \text{ ps}$ ;

invece per un laser a dye, che notoriamente ha una larghezza della curva di guadagno molto più grande, si ha

$$10^4 \text{ GHz} \Rightarrow \tau_p = 100 \text{ fs}$$

e quindi scendiamo al di sotto del picosecondo.

Se consideriamo la velocità di propagazione, possiamo ricavare la 'lunghezza dell'impulso' ovvero la lunghezza del treno d'onda.

Ebbene, per il primo impulso abbiamo 3 mm, mentre per il secondo abbiamo 30  $\mu\text{m}$ .

- realizzazione dell'ipotesi di differenza di fase costante

In generale un laser multimodo ha semplicemente un insieme di modi, senza una particolare relazione di fase, salvo il caso particolare del laser al titanio-zaffiro, che ha la particolarità di dare luogo ai fenomeni di self focusing (vedi ottica quantistica), per cui, in regimi di elevata intensità, il mezzo presenta indice di rifrazione che dipende dall'intensità, e dunque il mezzo si comporta come una lente, che può focalizzare (o defocalizzare) il fascio (perdite modulate).



Esistono due tipologie di metodi per costringere i vari modi di un laser multimodo a mantenere una differenza di fase costante : metodi attivi e metodi passivi. Vedremo che questi metodi si riconducono all'introduzione di opportune 'perdite modulate'.

Cominciamo a studiare il fenomeno nel dominio del tempo.

Immaginiamo di introdurre nella cavità delle perdite, piccole e modulate sinusoidalmente nel tempo.

Quello che succede è che i modi si 'aggiustano' in modo da minimizzare la perdita, per una sorta di 'selezione naturale' : quelli che vedono le perdite maggiori si estinguono, e rimangono quelli che vedono le perdite minori.

Consideriamo il campo elettrico del modo  $l$ -esimo :

$$E_l = E_0 \cos(\omega_l t + \phi_l).$$

Le perdite modulate introducono un'(ulteriore) modulazione nell'ampiezza del campo elettrico :

$$E_l = E_0 (1 + \alpha \cos \omega_p t) \cos(\omega_l t + \phi_l)$$

dove  $\alpha$  è la 'profondità' della modulazione delle perdite, e  $\omega_p$  è la frequenza di questa modulazione.

ricordando la relazione trigonometrica per il prodotto di due coseni

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

(vedi «Shaum's Mathematical formulas» pag 17 formula 5.66)

si ha :

$$E_l = E_0 (1 + \alpha \cos \omega_p t) \cos(\omega_l t + \phi_l)$$

$$E_l = E_0 [\cos(\omega_l t + \phi_l) + \alpha \cos \omega_p t \cos(\omega_l t + \phi_l)]$$

$$E_l = E_0 \cos(\omega_l t + \phi_l) + E_0 \frac{\alpha}{2} \{ \cos[\omega_l t + \phi_l - \omega_p t] + \cos[\omega_l t + \phi_l + \omega_p t] \}$$

$$E_l = E_0 \cos(\omega_l t + \phi_l) + E_0 \frac{\Omega}{2} \left\{ \cos[(\omega_l - \Omega) t + \phi_l] + \cos[(\omega_l + \Omega) t + \phi_l] \right\}.$$

Se grafichiamo questo nel dominio delle frequenze (trasformata di Fourier) abbiamo dunque tre modi di oscillazione : uno centrale a frequenza  $\omega_l$ , e due laterali, simmetrici, a frequenza  $\omega_l - \Omega$  e  $\omega_l + \Omega$  (vedi figura a pag 524).

In altre parole applicando questa modulazione dell'ampiezza abbiamo 'splittato' (nel dominio delle frequenze) quello che era un singolo picco di un singolo modo in tre picchi con quello centrale alla frequenza 'propria'  $\omega_l$  del modo e due bande laterali che compaiono, a distanza pari alla frequenza della modulazione.

L'oscillazione centrale viene chiamata in gergo 'portante', e le oscillazioni laterali vengono chiamate 'bande laterali'.

Questa è una cosa del tutto generale, che capita ogni qual volta si modula l'ampiezza di un segnale oscillante.

Dal punto di vista pratico questa modulazione delle perdite è realizzabile con un 'elettroottico'.

Occorre che la frequenza dell'elettroottico sia sufficientemente elevata.

Infatti ricordiamo che (a differenza di quanto riportato in figura) i modi hanno una loro larghezza (in frequenza), e dunque per 'risolvere' le bande laterali occorre che la loro distanza in frequenza dalla portante sia maggiore della larghezza della portante stessa (criterio di Rayleigh).

Ma la distanza in frequenza delle bande laterali dalla portante è proprio pari alla frequenza della modulazione di ampiezza che provochiamo con l'elettroottico.

Un ordine di grandezza tipico della larghezza di riga di un modo laser è 10 MHz, e dunque dobbiamo modularle le perdite a frequenze maggiori di 10 MHz, che non è banale (cavi schermati e corti, etc).

Una descrizione più rigorosa di questa situazione fisica si fa con le funzioni di Bessel.

Con questo approccio si riesce a dimostrare che le bande laterali hanno una precisa relazione di fase con la portante.

In particolare le bande laterali sono sfasate di  $\pi$  rispetto alla portante.

Vediamo adesso come queste bande laterali si possono usare per realizzare la condizione di differenza di fase costante tra i modi.

Consideriamo tre modi consecutivi, il modo  $l-1$ -esimo, il modo  $l$ -esimo e il modo  $l+1$ -esimo, con le loro bande laterali.

Ogni modo (portante) è separato dall'altro in frequenza di un intervallo che si chiama FSR :  $\omega_{FSR} = 2\pi \nu_{FSR}$ , mentre le bande laterali sono separate dalla

portante di  $\omega_0$ , che è la frequenza di modulazione.

Ma se facciamo in modo che la frequenza di modulazione coincida con il FSR, capiterà che le bande laterali di un modo coincidono con 'la portante' del modo precedente e del modo successivo.

Ricordiamo che la banda laterale e la corrispondente portante hanno una fissata differenza di fase.

Quello che succede è che quando una banda laterale coincide in frequenza con la portante di un altro modo, questa 'si aggancia' nel senso che la banda laterale assegna la sua stessa fase alla portante.

In questo modo si realizza la condizione di differenza di fase costante, e tutte le fasi risultano 'agganciate'.

Esempio numerico

Consideriamo un laser ad argon.

Il laser emette su più righe, e quindi si usa un prisma per selezionare un solo modo. Modulando le perdite (ad esempio con un piezoelettrico piazzato sul prisma stesso).

Facendo variare la frequenza di modulazione, quando questa diventa pari al FSR (o un suo multiplo) il fascio laser, da continuo, diventa un treno di impulsi.

Facendo i conti, se la lunghezza della cavità è di 1.8 m, la frequenza di ripetizione degli impulsi, che coincide con il Free Spectral Range, è dell'ordine di  $2L/c \approx 100$  MHz.

- cavity damping

A volte la frequenza di ripetizione può essere troppo elevata.

Se ad esempio vogliamo studiare il processo di rilassamento di un sistema, vogliamo che gli impulsi siano brevi (durata molto minore dei tempi di rilassamento) ma vogliamo anche che siano distanziati (distanza temporale molto maggiore dei tempi di rilassamento).

Per 'decimare' gli impulsi, si può 'prelevare' un impulso ogni tanto con un 'reticolo temporaneo' che si può realizzare con un acustooptico posto nella cavità, che devia il fascio 'a comando'.

1h 5'

- tecniche di autocorrelazione per la rivelazione veloce

Abbiamo visto impulsi della durata delle centinaia di picosecondi.

Per rivelare questi impulsi non abbiamo rivelatori abbastanza veloci.

(I diodi pin sono molto veloci, ma non abbastanza)

Possiamo utilizzare un metodo basato sull'autocorrelazione degli impulsi.

Per illustrare questo metodo dobbiamo prima accennare al meccanismo di generazione di seconda armonica.

[...]

- **Tipi di laser**

- laser a **stato solido**

(nei solidi, le cause di allargamento inhomogeneo sono l'effetto Stark, che disloca i livelli, ed è causato dai campi elettrici diversi che vedono i diversi siti reticolari, causati dai vari drogaggi. Altra causa sono le collisioni con i fononi)

in genere emettono tra i  $0.7 \div 1.2 \mu\text{m}$  (visibile e vicino infrarosso)

la transizione tra cui lavora la pompa si cerca di farla 'larga', in modo da

per ottimizzare il pompaggio

- \* laser a **rubino**

Il laser a rubino è stato il primo laser realizzato.  
Emette ad una lunghezza d'onda di 694.3 nm (rosso).

Il cristallo di rubino è corindone ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) con impurezze di cromo  $\text{Cr}^{3+}$  (0.05%).

Si tratta di un laser a 3 livelli.

La sezione d'urto della transizione di pompa è  $\sigma \approx 1.22 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ .

La larghezza di riga di emissione è di  $\Delta\nu = 330 \text{ GHz}$  ( $\Delta\nu = 9.9 \times 10^{-3} \text{ m}$ ).

L'ordine di grandezza della potenza di pompa critica è 800 W, mentre l'ordine di grandezza della potenza in uscita è di qualche watt, questo in regime continuo.

In regime impulsato si raggiungono nei picchi potenze dell'ordine delle decine di kW.

Note : questo laser in genere emette su molti modi trasversi e longitudinali, e dunque i fasci sono molto divergenti.

Con un rubino di ottima qualità e cavità particolari si ottiene l'emissione su un modo trasverso puro.

Con potenze limitate al solo 10 - 15% sopra la potenza di soglia si può ottenere un

modo longitudinale puro.

\* laser a **neodimio-YAG**

In un cristallo di  $Y_3Al_2O_{15}$  alcuni ioni trivalenti di neodimio.

laser a 4 livelli

vita media del livello laser superiore :  $\tau = 230$  ms

emissione laser a  $\lambda = 1064$  nm

larghezza di riga :

$$\Delta\nu \approx 100 \text{ GHz}$$

potenze d'uscita

in continua : 700 W

regime impulsato : 0.1 - 1 GW

se la matrice è vetro anziché YAG si ha un notevole allargamento di riga,  
*omogeneo*

$$\Delta\nu \approx 30 - 40 \text{ nm}$$

dunque il laser Nd - vetro funziona bene in regime impulsato con la tecnica mode locking, ottenendo dei picchi di potenza fino a  $10^{13}$  W.

- laser a gas

In generale i laser a gas usano come pompa una scarica : il gas è a una pressione che può essere bassa (1/100 atm) o alta (qualche atmosfera).

Due elettrodi 'rompono' il gas e producono una corrente.

I laser a gas possono operare in regime impulsato o continuo.

\*Regime impulsato

Per il regime impulsato si adotta spesso la tecnica di impulsare la pompa. In regime impulsato gli elettrodi si mettono a breve distanza (5 - 20 cm) e il gas si mette a pressione 'alta' (pressione atmosferica).

Le tensioni ai capi degli elettrodi sono dell'ordine dei 20 - 30 kV.

le potenze di picco sono dell'ordine del GW.

Le cadenze di ripetizione degli impulsi sono dell'ordine di 10 - 100 Hz.

\*Regime in continua

riguardo al regime in continua, si usano scariche a bagliore autosostenute con una geometria longitudinale, con gli elettrodi a distanze dell'ordine di 10-100 cm, e tensioni dell'ordine di 1000 V.

La potenza di emissione dei laser a gas in regime cw è nell'intervallo 1 mW - 100 W.

I laser a gas si dividono in tre categorie :

laser a gas atomici neutri

laser a gas atomici ionizzati

laser a gas molecolari

questi ultimi hanno uno spettro molto vasto, perché sfruttano transizioni tra livelli rotazionali, che sono livelli molto vicini; dunque le differenze di energia sono piccole, e quindi sono piccole le frequenze di Bohr associate.

Possono andare dal lontano infrarosso all'ultravioletto.

-- laser a He-Ne

è un laser a gas di atomi neutri.

Si sfruttano le transizioni tra stati eccitati dell'atomo di Neon.

È un laser a 4 livelli.

Può oscillare su tre lunghezze d'onda :

$$\lambda_1 = 3.39 \text{ }\mu\text{m}$$

$$\lambda_2 = 1.15 \text{ }\mu\text{m}$$

$$\lambda_3 = 0.6328 \text{ }\mu\text{m (quella famosa, nel rosso!).}$$

Gli atomi di Elio si trovano in uno stato eccitato metastabile (la transizione al livello fondamentale è proibita, almeno nell'approssimazione di dipolo).

Dunque questi stati eccitati metastabili rappresentano un 'serbatoio di energia' : la pompa eccita gli atomi di elio in questi stati, e poi gli atomi di elio eccitano quelli di neon per collisione.

L'efficienza quantica del processo di eccitazione (del Neon) è bassa ( $\eta \approx 1/20$ )

-- laser a ioni di Argon

la pompa è a scarica, e deve essere con alte correnti : per ogni atomo mi servono due elettroni : uno per ionizzarlo e uno per eccitare lo ione

emette su un sacco di transizioni

le frequenze di emissione sono  $0.350 \div 0.520 \mu\text{m}$

le emissioni più intense si hanno su due frequenze, una sul blu e una sul verde.

Si tratta di un laser a tre livelli.

La pompa eccita con eguale probabilità il livello laser superiore e il livello laser inferiore, ma il tempo di decadimento del livello laser inferiore è molto più alto, e dunque si spopola più velocemente. Questo fatto realizza 'automaticamente' l'inversione di popolazione.

Per ottenere alte correnti si creano problemi di disperdere il calore, di avere a che fare con temperature alte 3000 K.

Questo poi provoca un forte effetto Doppler  $\square$  larghezza di riga (curva di guadagno) 3.5 GHz.

++ laser a gas molecolari ++

Tali laser sfruttano transizioni tra livelli elettronici, tra livelli vibrazionali e transizioni tra livelli rotazionali

transizioni elettroniche  $\square$  ordine dell' eV  $\square$  visibile

transizioni vibrazionali  $\square$  ordine dell' 0.1 eV  $\square$  medio infrarosso ( $\square = 5 \div 30 \mu\text{m}$ )

transizioni vibrazionali  $\square$  ordine dell' 0.01 eV  $\square$  lontano infrarosso ( $\square > 30 \mu\text{m}$ )

• laser a CO<sub>2</sub>

È un laser di potenza :

100 KW in regime cw

100 MW in regime pw

efficienza complessiva (rapporto tra potenza di pompa e potenza ottica in uscita) del 30%

Nella miscela di gas c'è anche He e N<sub>2</sub>.

Il gas viene fatto fluire, in modo da tenerlo sempre fresco.

I livelli che intervengono nell'azione laser sono livelli vibrazionali, e dunque l'emissione è nel medio infrarosso.

L'energia vibrazionale è quantizzata (oscillatore armonico).

La molecola di azoto è lineare, e dunque ha un solo modo di vibrazione indipendente.

La molecola di CO<sub>2</sub> è una molecola triatomica lineare, e ha 3 modi di vibrazione indipendenti.

Si ricostruisce lo schema dei livelli vibrazionali.

Il laser a CO<sub>2</sub> è un laser a 4 livelli.

L'eccitazione del livello laser superiore (pompa) avviene o per urto con gli elettroni della scarica, o per urto con le molecole di azoto che si trovano in stati eccitati risonanti con il livello laser in questione.

La sezione d'urto dell'azoto è grande, e quindi è facile da eccitare. Inoltre il livello eccitato dell'azoto è metastabile, e quindi funziona da serbatoio di energia.

Invece la sezione d'urto della transizione dal livello fondamentale al livello laser inferiore è piccola, e dunque la pompa non popola anche il livello laser inferiore.

Esiste il problema del collo di bottiglia, perché c'è un livello tra il livello laser inferiore e il livello fondamentale.

Qui interviene l'elio, che assicura lo svuotamento di questo livello per convezione (trasferisce energia alle pareti) e risolve il pb del collo di bottiglia.

Allargamento della curva di guadagno : l'allargamento è di tipo Doppler.

Tuttavia l'allargamento è piccolo ( $\Delta\nu \approx 50$  Hz), a causa delle piccole frequenze di emissione.

Per tale motivo il laser oscilla in genere su un singolo modo, soprattutto se si diminuisce la lunghezza della cavità, aumentando il FSR.

- laser a eccimeri (dimeri (molecole biatomiche) eccitati)

Emettono nell'ultravioletto.

Poiché il livello fondamentale praticamente 'non esiste', l'efficienza quantica del



processo di emissione è quasi 1.

Gli eccimeri 'lavorano' ad alte pressioni.

Le vite medie di questi stati legati-eccitati sono molto brevi, dell'ordine del nanosecondo.

Dunque, affinché l'emissione stimolata sia più rilevante dell'emissione spontanea la densità di energia della pompa in cavità deve essere elevata.

La densità di potenza della pompa in cavità deve essere di  $10 \text{ MW/cm}^3$

In regime impulsato le potenze di picco sono dell'ordine di  $100 \text{ MW}$ .

Gli aspetti negativi sono

scarsa qualità spettrale

grande larghezza della curva di guadagno ( $3 \times 10^{12} \text{ Hz}$ )

alta divergenza dei fasci laser in uscita.

\* laser a idrogeno molecolare ( $\text{H}_2$ )

utilizza una transizione tra due stati elettronici della molecola di  $\text{H}_2$ .

Tale molecola non è un eccimero, ma una normale molecola legata.

La pompa è una scarica trasversa impulsata.

La pompa porta la molecola in uno stato elettronico eccitato che fa da livello laser superiore.

La lunghezza d'onda emessa è  $0.16 \mu\text{m}$  (ultravioletto) ed è la lunghezza d'onda laser più piccola che si riesce a realizzare

\* laser a  $\text{N}_2$

È un laser a 4 livelli

La transizione è tra stati vibrazionali.

la radiazione laser emessa è a  $\lambda = 0.34 \mu\text{m}$

La pompa è a scarica, il livello laser superiore ha una vita media di circa  $40 \text{ ns}$ .

La vita media del livello laser inferiore è di  $10 \mu\text{s}$ .

Quindi in questo laser c'è un pesante problema di 'collo di bottiglia', e dunque il laser

si autospegne.

Dunque non può funzionare in cw, ma solo in pw.

La durata degli impulsi è di 10 ns, con potenze di picco di 1 MW (10 mJ di energia emessi in 10 ns).

\* Laser a dye

Mezzo attivo = soluzioni di coloranti organici, drogati con ioni di terre rare. I coloranti sono molecole complesse, in genere composti organici.

Questi laser coprono dal vicino ultravioletto al vicino infrarosso.

Queste molecole hanno bande di assorbimento e di emissione molto larghe. In realtà si tratta di stati elettronici dei tanti atomi, con poi gli stati vibrazionali, e poi rotazionali, che sono talmente fitti e sovrapposti da creare vere e proprie bande.

Inoltre nei liquidi i meccanismi di allargamento di riga sono molto efficienti.

Il sistema di pompaggio che si usa è ottico, nell'ultravioletto o nel visibile.

La pompa provoca un'eccitazione tra stati elettronici.

A seguito dell'eccitazione c'è un rilassamento non radiativo verso lo stato vibrazionale più basso dello stato elettronico eccitato.

Da questo 'fondo' c'è un decadimento verso lo stato rotovibrazionale eccitato del livello elettronico fondamentale.

Con un altro processo di decadimento non radiativo la molecola si porta allo stato fondamentale (anche rotovibrazionale).

Svantaggi del laser a coloranti :

a) possono anche avvenire decadimenti verso *altri* stati, che non interessano, e che 'intrappolano' le molecole, anche per tempi lunghi, sottraendo molecole all'azione laser. Spesso il rilassamento da questi stati 'altri' è proibito in appr. di dipolo, e dunque si parla di stato metastabile : i tempi di decadimento possono arrivare anche al millisecondo.

b) Anche in eccitazione, ci sono transizioni dallo stato 'parassita' ad un altro stato eccitato che hanno la stessa frequenza della transizione di pompa, e quindi queste transizioni sottraggono energia alla pompa.

Per questi problemi i laser a die lavorano meglio in regime pw.

Per ottenere il regime pulsato si pulsa la pompa.

Per la pompa si usano laser ad azotoo laser ad eccimeri.

Ad esempio col laser ad azoto a 340 nm si eccitano i sistemi a die che emettono a  $\lambda = 380 \div 600$  nm si ottengono alti guadagni.

L'efficienza di conversione pompa - laser è dell'ordine del 30  $\div$  40 %.

La durata degli impulsi è dell'ordine di 5  $\div$  10 ns, e energie di 1 mJ (potenze di 100 kW).